

裂縫形狀對等向性脆性材料性質的影響

潘煌鏗*

摘要

橢圓形裂縫可由橢圓體介在物的材料性質以及厚度趨近於零而獲得。含裂縫之等向性材料性質和母體的柏松比，裂縫密度及裂縫形狀有關。採用 Budiansky 和 O'Connell 所定義的裂縫密度參數，根據 Eshelby 介在物理論和均值法所得的平均有效對等轉換應變能夠來解釋介在物體積和裂縫密度參數之間的關係，並可求得等向性裂縫材料彈性模數的明確公式。這個方法將避免如自合法對裂縫密度須小於 9/16 的限制。可用來預測高裂縫密度材料的彈性模數。結果顯示，裂縫形狀由圓形變化至帶狀時，其形狀變化對材料容積模數並沒有影響，且對剪力模數變化最大只有 12/13 倍。這顯示，在相同裂縫密度下，只能提高材料母體的柏松比值來增加材料的強度，而非控制裂縫形狀。

一、前言

脆性材料受荷重超過它的材料強度時，常會有裂縫產生而使得應變能無法貯存在材料內。因裂縫出現而吸收能量的方式，是一種材料本能反應，促使材料不會更進一步惡化。但是裂縫會使材料強度降低，使得脆性材料性質和未受力時的性質不同。對結構物而言，這種現

象對個別結構桿件或者整體結構的安全影響很大，必須事先加以估算。目前對現有結構材料強度的評估，是現場取樣，而直接做力學性質試驗。雖然有許多力學模式可用來推算材料的性質，但一套使用簡單且可靠的力學分析法用來分析裂縫材料性質，其成果可為試驗依據，則尚未被得知。

文獻指出，1976 年 Budiansky 和 O'Connell [1] 曾使用自合法 (self-consistent method) 計算等向性裂縫物體的平均彈性模數，其裂縫密度參數只能在 0 ~ 9/16 的範圍，即只可應用在低濃度裂縫材料裡。Law 和 Brockenbrough [2] 在 1987 年更進一步推導出一般自合法 (general self-consistent model)，使這個方法不再拘限只適用在等向性材料。但是，自合法的缺點，只能用在裂縫含量不多的材料，仍無法克服。1989 年 Zhao [3] 利用 Eshelby 理論 [4] 及均值法 [5, 6] 推導含圓形裂縫之等向性材料的平均彈性模數。當圓形裂縫密度超過 9/16 時，這個方法所計算的圓形裂縫材料彈性模數，並不會像自合法的結果，變成負值，顯示出這個方法較自合法更適用於高裂縫密度材料。

在這篇文章裡，主要是考慮高含量裂縫之形狀對破裂材料的平均彈性模數影響。首先，

*國立高雄工商專校土木工程科副教授

將雙相複合材料之介在物 (inclusions) 性質當做零, 使得此複合材料變成含孔隙的材料。假設孔隙介在物為橢圓體 (ellipsoids), 利用 Tandon 和 Weng [6] 的方法求出等向性孔隙材料的平均對等轉換應變 (overall equivalent transformation strain)。若橢圓體的三個半軸長度分別是 a_1, a_2 和 a_3 , 且 $a_1 > a_2 > a_3$ 。令 a_3 趨近於零, 則此孔隙介在物更進一步變成橢圓形裂縫, 其形狀由 a_2/a_1 決定。再根據裂縫密度參數定義 [1] 及介在物理論 [4], 使有效對等轉換應變 (effective equivalent transformation strain) 能夠從體積比 (volume fraction) 關係而轉換成以裂縫密度參數 (crack density parameter) 為主的形態。這個有效對等轉換應變可用來求材料的彈性模數, 則等向性材料含裂縫的性質和裂縫密度的多寡有關。因此只要改變 a_2/a_1 的比例, 裂縫形狀對材料性質的影響, 可輕易求得。

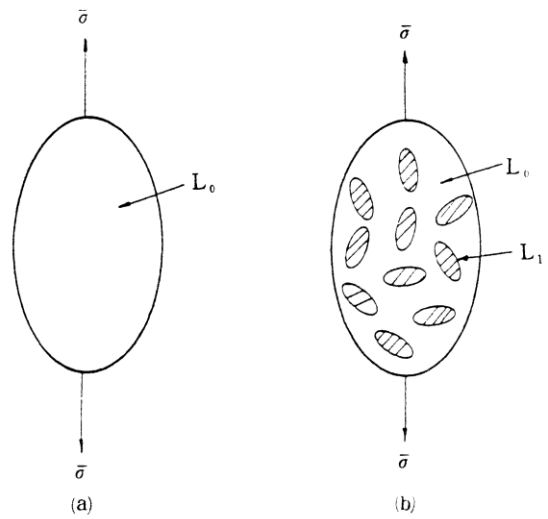
二、等向性孔隙複合材料性質

若雙相複合材料內含分佈均勻的橢圓體介在物, 其介在物形狀效應可用 Eshelby S 張量來表示, 此 S 張量和材料母體 (matrix) 的相比及介在物的空間比 (aspect ratio) 有關, 其關係式可從 Eshelby [4] 或者 Mura [7] 查得。因介在物係在 3 度空間內均勻散佈, 使得複合材料的整體行為呈現等向性 (isotropy), 如圖一所示。假設母體和介在物彼此間接觸良好, 沒有空隙, 且材料系統內的能量不會損失。圖一所示, L_0 和 L_1 各為複合材料母體及介在物的材料性質, 皆為四階張量。 $\bar{\sigma}$ 是一均勻施加在複合材料及對比材料 (comparison material) 邊界上的應力, 兩種材料受相同 $\bar{\sigma}$ 。對比材料是由和複合材料母體同性質的材料所組成。由應力-應變關係:

$$\bar{\sigma} = L \bar{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{\sigma} = L_0 \epsilon^0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

其中, L 是複合材料的有效彈性模數 (effec-



圖一 (a)有材料母體彈性性質的對比材料
(b)有橢圓體介在物之變相複合材料

tive elastic moduli), $\bar{\epsilon}$ 和 ϵ^0 分別是複合材料及對比材料受 $\bar{\sigma}$ 所產生的應變, 且 σ 和 ϵ 皆為張量表示。根據 Eshelby-Mori-Tanaka 理論 [4 , 5], 母體和介在物的應力分別是:

$$\sigma^{(0)} = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\sigma^{(1)} = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma} + \sigma^{P1} \quad \dots\dots\dots (4)$$

其中, 上標 (0) 與 (1) 分別表示母體和介在物。 $\tilde{\sigma}$ 和 σ^{P1} 皆是擾動應力 (perturbed stress), 分別由介在物濃度所引起, 及複合材料和對比材料比較結果所得的。從對等理論 (equivalent theory) 的觀念, (4) 改寫成:

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= L_1 (\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{P1}) \\ &= L_0 (\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{P1} - \epsilon^*) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

上式, $\tilde{\epsilon}$ 是介在物在母體內彼此對應所引起的平均擾動應變, ϵ^{P1} 是複合材料和對比材料比較時, 母體因介在物存在而有的擾動應變。另外, ϵ^* 是對等轉換應變, 由不同材質之母體與介在物所導致的不均質 (inhomogeneity) 影響。

從應力平衡觀點 [8], 母體的平均擾動應力為

$$\tilde{\sigma} = -c_1 \langle \sigma^{pt} \rangle \dots\dots\dots (6)$$

其中， c_1 是介在物體積比。(6)式之括號 $\langle \bullet \rangle$ 表示 3 度空間之各方向 “ \bullet ” 的體積平均，即：

$$\langle \bullet \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\bullet) \rho(\phi, \theta, \psi) \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(\phi, \theta, \psi) \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, d\psi} \dots\dots\dots (7)$$

其中， $\rho(\phi, \theta, \psi)$ 是機率密度函數 (probability density function)。若介在物在母體每單位體積的分佈情形一樣，則 $\rho(\phi, \theta, \psi)$ 等於常數。因此(7)變成

$$\langle \bullet \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\bullet) \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, d\psi} \dots\dots\dots (8)$$

此式是針對非等向性橢圓體介在物之特殊量 “ \bullet ” 的 3 度空間平均值。

從(3)~(6)的關係，

$$\tilde{\varepsilon} = -c_1 \langle \varepsilon^{pt} - \varepsilon^* \rangle \dots\dots\dots (9)$$

因為 Eshelby 已證明在介在物座標 (local system) 時，

$$\varepsilon^{pt} = S \varepsilon^* \dots\dots\dots (10)$$

將(10)代入(9)

$$\tilde{\varepsilon} = -c_1 \langle (S - I) \varepsilon^{*'} \rangle \dots\dots\dots (11)$$

其中， I 為四階單位張量 (Identity Tensor)，上標 “ $'$ ” 表示在介在物座標的值。從(5)，(10)及(11)，則對等轉換應變

$$\varepsilon^{*'} = U \cdot (\varepsilon^0 - \tilde{\varepsilon}') \dots\dots\dots (12)$$

式中

$$U = -[(L_1 - L_0)S + L_0]^{-1} \cdot (L_1 - L_0) \dots\dots\dots (13)$$

利用座標轉換關係

$$\varepsilon' = Q \cdot \varepsilon \cdot Q^t \dots\dots\dots (14)$$

求得複合材料座標 (global system) 時的值。其中， Q 是正交轉換矩陣 (orthogonal transformation matrix)，在 3 度空間均勻散佈的介在物：

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\phi - \cos\theta \sin\phi \sin\psi & \cos\psi \sin\phi + \cos\theta \cos\phi \sin\psi & \sin\psi \sin\theta \\ -\sin\psi \cos\phi - \cos\theta \sin\phi \cos\psi & -\sin\psi \sin\phi + \cos\theta \cos\phi \cos\psi & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\phi & -\sin\theta \cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

以卡笛爾 (Cartesian) 座標系為例，(X_1, X_2, X_3)，先對 X_3 軸旋轉 ϕ 角，再對 X_1 軸旋轉 θ 角，最後再對 X_3 軸旋轉 ψ 角。因此 $Q_{11} = \beta_\psi \cdot \beta_\theta \cdot \beta_\phi$ ，即(15)式的結果。 β 是從一座標變換至另一座標的正交轉換矩陣。另外 Q^t 是 Q 的轉置矩陣。將(14)代入(11)和(12)，得

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= -c_1 \langle Q^t \cdot (S - I) [U \cdot Q \cdot (\varepsilon^0 + \tilde{\varepsilon}') \cdot Q^t] \cdot Q \rangle \dots\dots\dots (16) \\ \varepsilon^* &= \langle Q^t \cdot [U \cdot Q \cdot (\varepsilon^0 + \tilde{\varepsilon}') \cdot Q^t] \cdot Q \rangle \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

最後，將(8)，(15)和(16)代入(17)，橢圓體介在物的平均對等轉換應變則可求出。若母體和介在物皆為等向性材料，則

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{11}^* \rangle \\ \langle \varepsilon_{22}^* \rangle \\ \langle \varepsilon_{33}^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{33}^0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{12}^* \rangle \\ \langle \varepsilon_{13}^* \rangle \\ \langle \varepsilon_{23}^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{13} & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{12}^0 \\ \varepsilon_{13}^0 \\ \varepsilon_{23}^0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

其中 A_{ij} 及 p_{ij} 為參數，依材料性質及介在物幾何排列而定。因橢圓體介在物係 3 度空間均勻分佈在母體內，促使複合材料的性質呈等向

性。(18)和(19)可改寫

$$\langle \epsilon_{kk}^* \rangle = \frac{p_2}{p_1} \epsilon_{kk}^0 \dots\dots\dots (20)$$

$$\langle \epsilon_{ij}^* \rangle = \frac{q_2}{q_1} \epsilon_{ij}^0, i \neq j \dots\dots\dots (21)$$

雙相複合材料的平均應變

$$\bar{\epsilon} = c_0 \epsilon^{(0)} + c_1 \langle \epsilon^{(1)} \rangle \dots\dots\dots (22)$$

其中 $c_0 = 1 - c_1$ 。從(2)~(5)式， $\epsilon^{(0)} = \epsilon^0 + \tilde{\epsilon}$ 和 $\epsilon^{(1)} = \epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon^{p1}$ ，將這兩式及(9)代入(22)，則複合材料的平均應變為

$$\bar{\epsilon} = \epsilon^0 + c_1 \langle \epsilon^* \rangle \dots\dots\dots (23)$$

由(1)，(2)和(23)的關係，複合材料的性質L可由下式求得：

$$L(\epsilon^0 + c_1 \langle \epsilon^* \rangle) = L_0 \epsilon^0 \dots\dots\dots (24)$$

因為平均對等轉換應變的一般式已在(20)及(21)，將之代入(24)，則複合材料的容積模數(bulk modulus)和剪力模數(shear modulus)分別為

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{1 + c_1(p_2/p_1)} \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1 + c_1(q_2/q_1)} \dots\dots\dots (26)$$

其中 κ 和 μ 各為複合材料的容積模數和剪力模數，下標“0”表示為材料母體的性質。

對多孔隙材料而言， $L_1 \rightarrow 0$ ，參考Tandon和Weng〔6〕所提出的計算方法，得：

$$p_1 = q_1 = c_0, \\ p_2 = - \{ (1 + S_{1122} - S_{1111})(1 + S_{2233} - S_{3333}) \\ + (1 + S_{1133} - S_{1111})(1 + S_{3322} - S_{2222}) \\ + (S_{2211} - S_{3311})(1 + S_{1133} - S_{1122}) \\ + (1 - S_{2222})(1 + S_{3311} - S_{3333}) \\ + S_{2211}(S_{3322} - S_{3333}) \\ + S_{2233}(S_{3311} - S_{3322}) + S_{3311} \} / (3A),$$

$$q_2 = \{ 1 / (1 - 2S_{1212}) + 1 / (2S_{1313}) \\ + 1 / (1 - 2S_{2323}) \} / 5 \\ + \{ (1 - S_{1111})(2S_{2222} + 2S_{3333} + S_{2233} + S_{3322} - 4) \\ + (1 - S_{2222})(2S_{3333} + S_{3311} + S_{1133} - 2) \\ + S_{3322}(2S_{2233} + S_{2211} + S_{1133}) \\ + S_{3311}(2S_{1133} + S_{1122} + S_{2233}) \\ + S_{2211}(1 + 2S_{1122} + S_{1133} - S_{3333}) \\ + S_{1122}(1 + S_{2233} - S_{3333}) \} / (15A), (27)$$

式中

$$A = (S_{3333} - 1) \{ (S_{1111} - 1)(S_{2222} - 1) \\ - S_{1122}S_{2211} \} \\ - S_{3322} \{ S_{2233}(S_{1111} - 1) - S_{2211}S_{1133} \} \\ - S_{3311} \{ S_{1133}(S_{2222} - 1) - S_{1122}S_{2233} \} (28)$$

其中， S_{ijk1} 為S張量〔7〕。因此，含橢圓體孔隙材料的彈性模數已被求出，且表示成明確式(explicit form)。(27)和(28)的結果係針對橢圓體孔隙，和Zhao〔3〕的圓球體(spheroid)孔隙不同，換句話說，圓球體孔隙只是橢圓體孔隙的其中一個特例。將(27)代入(25)及(26)，得出和〔3〕相同的結論，即球形孔隙材料在相同孔隙體積下總是比其它形狀孔隙材料的彈性模數要高。

三、裂縫密度參數與幾何性質

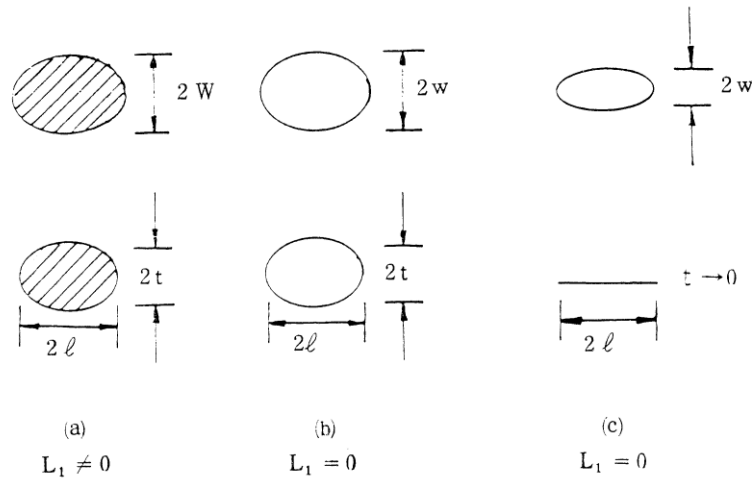
當橢圓體孔隙材料的性質已知，此時材料性質和孔隙體積多寡有很大關係。令孔隙厚度趨近於零，使

$$\alpha = \frac{t}{l} \rightarrow 0 \dots\dots\dots (29)$$

其中， t 和 l 是孔隙的一半厚度與一半長度。這時候，橢圓體孔隙已轉變成橢圓形裂縫。若將橢圓形裂縫的空間比定義成

$$r = \frac{w}{l} \dots\dots\dots (30)$$

裂縫寬度的一半用 w 表示，如圖二所示。因此，當 r 從0變至1時，裂縫形狀亦將改變。例如



圖二 介在物的幾何形狀(a)橢圓體介在物 ($L_1 \neq 0$) (b)橢圓體孔隙 ($L_1 = 0$)
(c)橢圓形裂縫 ($L_1 = 0$ 且 $t \rightarrow 0$)

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{圓形裂縫} \\ 0 < \gamma < 1, & \text{橢圓形裂縫} \\ \ll 1, & \text{帶狀裂縫} \end{cases} \dots (31)$$

假定所有裂縫具有相同的空間比 γ ，且單位體積之裂縫（介在物）總數為 N 。單一橢圓體介在物體積 V_s 為

$$V_s = \frac{4}{3} \pi w l t \dots (32)$$

則介在物的總體積比 $c_1 = N V_s$ 。若 $\alpha \rightarrow 0$ ，此介在物面積

$$A = \pi w l \dots (33)$$

從裂縫密度參數定義 [1]

$$\eta = \frac{2 N A^2}{\pi P} \dots (34)$$

其中 P 是裂縫的周長。這個裂縫密度定義特別指出裂縫的大小和形狀並沒有任何關聯。有關裂縫密度 η 與體積比 c_1 的關係，已分別計算並列在表一。 $E(\gamma)$ 是第二類完全橢圓積分，和裂縫空間比有關。例如 $E(1) = \pi / 2$ 或 $E(0) = 1$ 分別表示圓形和帶狀裂縫，都是橢圓形裂縫的特例之一。

表一 介在物體積和裂縫密度參數的關係

裂縫形狀	A	P	η	c_1
圓形裂縫	πl^2	$2 \pi l$	$N l^3$	$\frac{4}{3} \pi \alpha \eta$
帶狀裂縫	$\pi w l$	$4 l$	$\frac{\pi}{2} \gamma^2 N l^3$	$\frac{8}{3} \frac{1}{\gamma} \alpha \eta$
橢圓形裂縫	$\pi w l$	$4 l E(\gamma)$	$\frac{\pi}{2} \frac{\gamma^2}{E(\gamma)} N l^3$	$\frac{8}{3} \frac{E(\gamma)}{\gamma} \alpha \eta$

四、平均有效對等轉換應變

因含裂縫的材料體，其介在物已完全由裂縫所代替，因此介在物的體積應以裂縫密度形態存在，而非體積比。因變相複合材料之平均對等轉換應變 $\langle \epsilon^* \rangle$ 已被導出如 (20) 和 (21)，且介在物的體積比為 c_1 ，使得 $\langle \epsilon^* \rangle$ 對整體材料的影響應為 $\langle c_1 \epsilon^* \rangle$ ，即所謂的平均有效對等轉換應變。故只要 $c_1 (p_2/p_1)$ 和 $c_1 (q_2/q_1)$ 能轉換成裂縫密度參數為主，則裂

$$c_1 \frac{q_2}{q_1} = \frac{8}{45} \frac{(1-\nu_0) [E^2(1-\gamma^2)^2(10-7\nu_0) + 4\nu_0(F-E)(E-F\gamma^2)\gamma^2]}{E^2(1-\gamma^2)^2(1-\nu_0) + \nu_0(F-E)(E-F\gamma^2)\gamma^2} \eta \dots\dots\dots (36)$$

其中 ν_0 為材料母體的柏松比； $F = F(\gamma)$ 和 $E = E(\gamma)$ 則是第一類與第二類的完全橢圓積分，即

$$F(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-(1-\gamma^2)\sin^2\theta} d\theta \dots\dots\dots (37)$$

$$E(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(1-\gamma^2)\sin^2\theta} d\theta \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1 + \frac{8(1-\nu_0) [E^2(1-\gamma^2)^2(10-7\nu_0) + 4\nu_0(F-E)(E-F\gamma^2)\gamma^2]}{45 E^2(1-\gamma^2)^2(1-\nu_0) + \nu_0(F-E)(E-F\gamma^2)\gamma^2} \eta} \dots\dots\dots (40)$$

從 (39) 的關係，得出一個很重要的結論：裂縫材料的有效容積模數與裂縫的形狀無關，只和母體的柏松比及裂縫密度有某種程度關係。這表示，不管等向性裂縫材料所含裂縫形狀為何，只要裂縫密度相同，其容積模數永遠不變。例如，在 η 相同的情況下，圓形裂縫材料與帶狀裂縫材料有相同的容積模數。有關有效剪力模數與裂縫形狀 (γ) 的關係，可以用不同裂縫之材料來比較。若裂縫空間比 $\gamma = 1$ ，由 (40) 得知，含圓形裂縫材料之剪力模數比的明確式為：

縫材料性質從 (25) 及 (26) 即可得知。

推導以裂縫密度參數為主的平均有效對等轉換應變之步驟非常簡單。首先，將 c_1 乘以 (27) 的結果；因裂縫的 $c_1 \rightarrow 0$ ，所以必須利用表一的 $c_1 - \eta$ 關係得出結果，再令 $\alpha \rightarrow 0$ 。最後計算的結果為

$$c_1 \frac{p_2}{p_1} = \frac{16}{9} \frac{1-\nu_0^2}{1-2\nu_0} \eta \dots\dots\dots (35)$$

五、裂縫材料彈性模數與裂縫形狀

因為 $c_1(p_2/p_1)$ 與 $c_1(q_2/q_1)$ 已成功的由 c_1 轉變成以 η 為主的形態，則等向性材料含橢圓形裂縫的彈性模數可將 (35) 和 (36) 代入 (25) 與 (26) 而求得。等向性裂縫材料之容積模數與剪力模數為

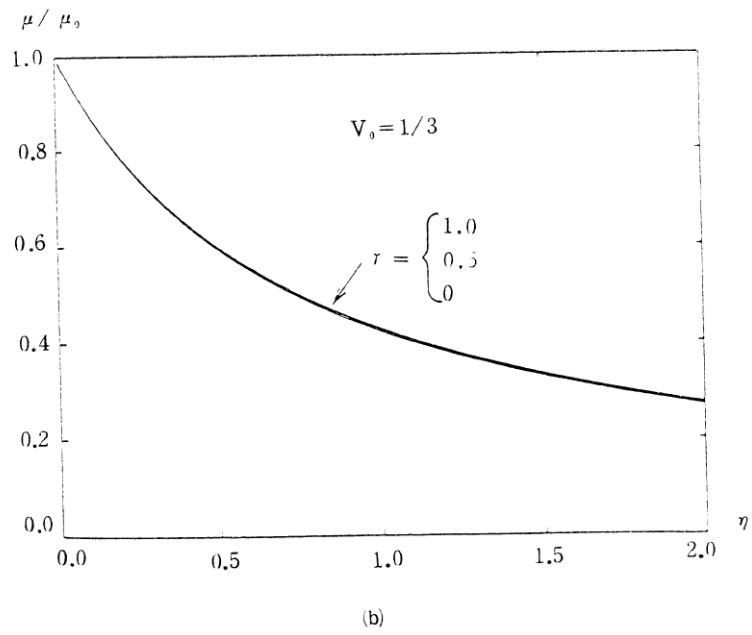
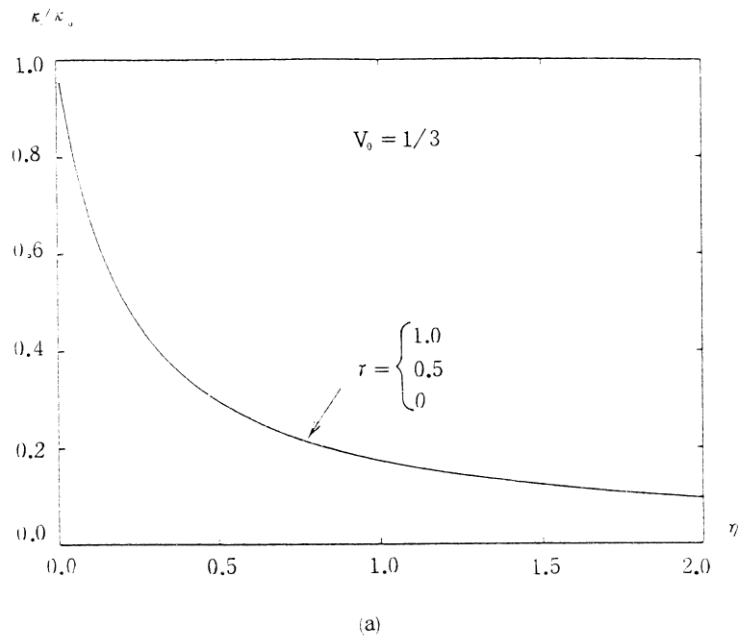
$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9} \frac{1-\nu_0^2}{1-2\nu_0} \eta} \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1 + \frac{32}{45} \frac{(1-\nu_0)(5-\nu_0)}{2-\nu_0} \eta} \dots\dots\dots (41)$$

此結果完全和 Zhao [3] 相同。若 $\gamma \rightarrow 0$ 或者 $\gamma \rightarrow \infty$ ，則含帶狀裂縫材料的剪力模數比為

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1 + \frac{8}{45} (10-7\nu_0) \eta} \dots\dots\dots (41)$$

比較 (41) 及 (42) 的關係，當 ν_0 從 0 到 1/2 間變化，發現其比例只由 1 變化至 12/13。這



圖三 不同裂縫形狀時之等向性裂縫材料的彈性模數及裂縫密度的關係
 (a)容積模數；(b)剪力模數。

表示。圓形裂縫材料與帶狀裂縫材料的剪力模數在 $\nu_0=0$ 時相同，而在 $\nu_0=0.5$ 時相差只有 0.92 倍。因此，裂縫形狀對裂縫材料剪力模數的影響並不多。比較孔隙材料與裂縫材料之介在物形狀效應，發現其結果極不相同，即孔隙形狀對材料性質的影響極大，但裂縫形狀則幾乎沒有影響。圖三是以 $\nu_0=1/3$ 為例，將(39)及(40)的結果，以不同裂縫形狀和彈性模數做說明。

六、結語

等向性材料的平均彈性模數與裂縫形狀關係已被推導，其材料性質和裂縫密度多寡及母體柏松比有關，但受裂縫形狀影響極小。這是因為材料在垂直裂縫面方向的性質受裂縫影響較大，但和裂縫平行方向的材料性質變化並不大，因此使不同形狀之均勻分佈裂縫對材料性質有相同的影響。所以對以提高裂縫材料強度為目的而言，最好是從控制材料裂縫密度或者使用較高柏松比材料來著手。

參考文獻

1. Budiansky, B. and O'Connell, R.J. "Elastic Moduli of a Cracked Solid", *International Journal of Solids Structures*, Vol.8, pp.81-97, 1976。
2. Law, N. and Brockenbrough, J.R. "The Effect of Micro-Crack Systems on the Loss of Stiffness of Brittle Solids", *International Journal of Solids Structures*, Vol.23, No.9, pp.1247-1268, 1987。
3. Zhao, Y.H., Tandon, G.P. and Weng, G.J. "Elastic Moduli for a Class of Porous Materials", *Acta Mechanica*, Vol.76, pp.105 ~ 130, 1989。
4. Eshelby, J.D. "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Relation Problems", *Proceedings of the Royal Society*, London, Vol. A241, pp.376 ~ 396, 1957.
5. Mori, T. and Tanaka, K. "Average Stress in the Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp.571 ~ 574, 1973。
6. Tandon, G.P. and Weng, G.J. "Average Stress in the Matrix and Effective Moduli of Randomly Oriented Composites", *Composite Science and Technology*, Vol.27, pp.111 ~ 132, 1986.
7. Mura, T. "Micromechanics of Defects in Solids", 2d ed., Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1987。
8. Weng, G.J. "Some Elastic Properties of Reinforced Solids, with Special Reference to Isotropic Ones Containing Spherical Inclusion," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 22, pp.845 ~ 856, 1984。