

水泥基複合材料應力-應變曲線力學模式

潘煌鏗

中華民國 高雄市
國立高雄應用科技大學土木工程系
教授

郭聰慧

中華民國 高雄縣
國立岡山農工職校建築科
教師

摘要

本研究找出代表水泥基材應力-應變行為之力學模型，並模擬水泥基複合材料的應力-應變行為。首先以變位控制方式進行材料抗壓試驗，求出水泥漿的楊氏模數、松柏比，應力-應變曲線等；並經由試誤法和電腦模擬獲得水泥漿應力-應變曲線的數學解，此數學解配合柏格質流模型模擬，可找出代表水泥漿行為的四個彈簧和阻尼係數，此四參數力學模型與水泥漿試驗結果比較，發現力學模型可完全模擬水泥基材的應力-應變行為。比較不同配比的水泥基複合材料，發現只要適當地修正彈簧和阻尼係數，則此理論力學模型同樣可得到與試驗值十分吻合的水泥漿和水泥砂漿之應力-應變曲線。

關鍵字: 水泥基複合材料、應力-應變曲線、力學模式

一、前言

由已知文獻顯示，水泥漿(cement paste)是一種非線性(non-linear)材料[1-2]，因水泥漿本身有次微裂縫(submicrocracks)存在，當壓應變增加時，小裂縫即結合成大裂縫，次微裂縫存在於水泥漿的CSH (calcium silicate hydrate)裡，或在水泥砂漿之砂與CSH的界面；另外，當材料承受外力時，其彈性拘束力(elastic constraint)會因外力增加而減少，這兩種因素造成水泥漿具非線性行為。

水泥基複合材料(cement-matrix composites)，如混凝土或砂漿，主要由水泥漿和骨材組成，由此可知混凝土的非線性行為是受水泥砂漿的非線性行為影響；而水泥砂漿的非線性行為和水泥漿的非線性行為有關，因此可以將水泥複合材料考慮成具非線性行為之材料。為了能更廣泛將複合材料的理論應用在混凝土材料，把混凝土視為由水泥基結合材(母材)和骨材(加強材)的複合材料，而探討混凝土力學行為，首先必須用試驗和理論來模擬水泥基母材的非線性行為特

性。

本研究嘗試用柏格質流模式(Burger's rheological model)的四個彈簧和阻尼組合來模擬水泥基母材的力學行為。首先進行一般材料力學試驗，就可獲得水泥漿及水泥砂漿之強度，應力-應變曲線，楊氏模數(Young's modulus)和柏松比(Poisson's ratio)。材料試驗完成後，經由試誤法(trial and error)和電腦模擬求解材料參數(material parameters)，獲得水泥漿固體(母材)應力-應變曲線的數學模式(mathematics model)。並配合本研究推導之柏格力學模式微分方程的數學解，找出代表水泥漿行為之彈簧係數和阻尼係數關係。則母材在任何變形階段的材料正割模數(secant moduli)均可求得，如此則可把線性關係的程序擴展到非線性關係的領域，對模擬水泥基複合材料應力-應變行為有關鍵性的影響地位。

二、水泥漿材料行為

2.1 試驗材料及方法

試驗目的為求水泥漿之應力-應變曲線、楊氏模

數和柏松比。試驗材料採用比重 3.15 之東南水泥公司卜特蘭第一型水泥，水泥漿之水灰比 $w/c=0.485$ 。試體根據 CNS1230 和 CNS1231 的標準程序進行拌製和養護，製作 $5 \times 10\text{cm}$ 和 $10 \times 20\text{cm}$ 兩種小、大尺寸試體。

本研究加載方式採用變位控制，使用 MTS 材料試驗機進行單軸抗壓試驗，控制大顆試體與小顆試體之加載應變速率 (strain rate) 相同，都為 $\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-5}/\text{sec}$ 。製作 8 顆 $5 \times 10\text{cm}$ 試體進行抗壓強度試驗，試體裝置 2.5cm 長之縱向伸長計 (extensometer)，以 $7.2 \text{ mm}/120 \text{ min}$ ($1 \times 10^{-3} \text{ mm}/\text{sec}$) 的變位速率進行試體壓縮試驗。每秒擷取一次資料，包括時間、力量、軸向變位和縱向伸長計變位，求 28 天齡期單軸加載至破壞之完整應力-應變曲線。另外，同樣製作 8 顆 $10 \times 20\text{cm}$ 試體，以 $14.4 \text{ mm}/120 \text{ min}$ ($2 \times 10^{-3} \text{ mm}/\text{sec}$) 的變位速率進行試體壓縮試驗，試體裝置縱向伸長計(10cm 長)及橫向伸長計，加載應變速率與 $5 \times 10\text{cm}$ 試體相同，並求得線性階段之楊氏模數及柏松比。

2.2 水泥漿之應力-應變曲線

本研究之水泥漿試驗後，得到母材(水泥漿)之應力-應變曲線圖，如圖 1，經分析其試驗值及用電腦模擬求解參數，求得其數學組構方程如下：

$$\frac{\sigma}{f_u} = 3.71 \times [e^{-0.61004(\epsilon/\epsilon_u)} - 1.009 e^{-1.27202(\epsilon/\epsilon_u)}] + 0.0334 \quad (1)$$

其中 σ = 水泥漿應力(MPa)， ϵ = 水泥漿應變， f_u = 水泥漿極限應力(peak stress)， $\epsilon_u = f_u$ 對應之應變。由 $10 \times 20\text{cm}$ 試體試驗得知(圖 1)， $f_u = 45.23 \text{ MPa}$ ， $\epsilon_u = 7.5 \times 10^{-3}$ ，應變速率 $\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-5}/\text{sec}$ ，面積 $A = \pi \times (5\text{cm})^2 = 78.54 \text{ cm}^2$ 。將以上試驗數據代入(1)式，解得：

$$\sigma = 167.8 [e^{-0.08134(\epsilon \times 10^3)} - 1.009 e^{-0.1696(\epsilon \times 10^3)}] + 1.51 \quad (2)$$

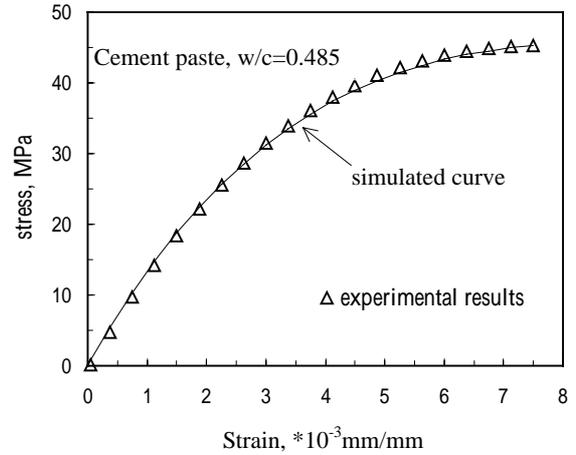


圖 1 水泥漿試驗與數學模擬之應力-應變關係

若 $f(\epsilon)$ 為外力，和應變 ϵ 有關，且 $f(\epsilon) = \sigma A$ ，此時(2)式可寫成：

$$f(\epsilon) = 1.318 \times 10^6 [e^{-0.08134(\epsilon \times 10^3)} - 1.009 e^{-0.1696(\epsilon \times 10^3)}] + 1.186 \times 10^4 \quad (3)$$

其中 $f(\epsilon)$ 的單位是 N 。若 t = 加載時間，則 $\epsilon = t \cdot \dot{\epsilon}$ ，且已知 $\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-5}/\text{sec}$ ，代入(3)式可得：

$$f(t) = 1.318 \times 10^6 [e^{-0.08134(t \times 10^{-2})} - 1.009 e^{-0.1696(t \times 10^{-2})}] + 1.186 \times 10^4 \quad (4)$$

令 $t' = t \times 10^{-2}$ (把時間座標值縮小)可將(4)式簡化成：

$$f(t') = 1.318 \times 10^6 [e^{-0.08134(t')} - 1.009 e^{-0.1696(t')}] + 1.186 \times 10^4 \quad (5)$$

此組構方程表示水泥漿載重與加載時間的關係，可用來和柏格(Burger)模型的四個參數比較，求得代表水泥漿材料的四個參數(見下節)。

三、水泥基結合材之力學模型

許多材料都兼具有黏性和彈性的特性(features of viscoelasticity)，要描述材料行為，最簡便之方法是藉由基本流變元素組合建構而成，即由許多彈簧(spring)和阻尼(dash-pot)所組成的力學模式來模擬[3-5]，這些

系統都由具有彈簧常數 k 的線性彈簧和具有黏滯係數 η 的阻尼所構成。線性彈簧假設為瞬間變位正比於外力，而阻尼是假設為瞬間變位速度正比於外力。彈簧之關係式為 $F = ku$ 或 $\sigma = E\varepsilon$ ；阻尼之關係式為 $F = \eta\dot{u}$ 或 $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ 。固體的黏彈性行為，係藉由此基本元素而建構不同組合模式加以說明。

水泥漿或水泥基結合材的應力-應變關係是非線性且破壞行為比較脆性，此種結合材的非線性行為，可用柏格模型的四參數(二個彈簧元件和二個阻尼元件)模型來表示，如圖 2：

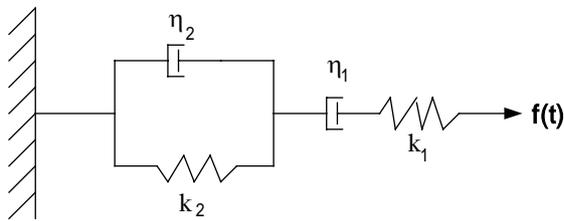


圖 2 彈簧阻尼之力學模型

其中 $f(t)$ = 外力(時間之函數)， k_1, k_2 = 彈簧常數， η_1, η_2 = 阻尼係數， u_1, u_2, u_3 = 各元件處之變位，即 $u_1 = k_1$ 處之變位， $u_2 = \eta_1$ 處之變位， $u_3 = k_2$ 和 η_2 處之變位。

假設此系統是變位控制(strain control)， w = 變位速率，則總位移 $u = wt$ 或 $\dot{u} = w$ 。由力與位移關係得到下列方程式：

$$k_1 u_1 = f_1 = f(t), \quad (6)$$

$$\eta_1 \dot{u}_2 = f_2 = f(t), \quad (7)$$

$$\eta_2 \dot{u}_3 + k_2 u_3 = f_3 = f(t), \quad (8)$$

其中力滿足 $f_1 = f_2 = f_3 = f(t)$ ，位移滿足

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = wt, \quad (9)$$

將(9)式微分，得到

$$\dot{u} = w = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \quad (10)$$

為獲得力學模型的微分方程式，可將(6)式微分得 $\dot{u}_1 = \dot{f}(t)/k_1$ ，並積分(7)式及配合(8)式和(9)式，則(10)式可改寫成

$$\begin{aligned} w &= \frac{\dot{f}(t)}{k_1} + \frac{f(t)}{\eta_1} + \frac{f(t)}{\eta_2} - \left(\frac{k_2}{\eta_2}\right) \left(wt - \frac{f(t)}{k_1} - \int \frac{f(t)}{\eta_1} dt \right) \\ &= \frac{\dot{f}(t)}{k_1} + \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{k_2}{k_1 \eta_2} \right) f(t) - \left(\frac{k_2}{\eta_2} \right) wt \\ &\quad + \left(\frac{k_2}{\eta_2} \right) \int \frac{f(t)}{\eta_1} dt \quad (11) \end{aligned}$$

將(11)式微分得

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) + k_1 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{k_2}{k_1 \eta_2} \right) \dot{f}(t) + \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} f(t) \\ - k_1 \left(\frac{k_2}{\eta_2} \dot{w} t + \frac{k_2}{\eta_2} w \right) = k_1 \dot{w} \end{aligned}$$

令 $f(t) = y$ 得

$$\begin{aligned} \ddot{y} + k_1 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{k_2}{k_1 \eta_2} \right) \dot{y} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} y \\ = k_1 \left(\frac{k_2}{\eta_2} \right) w + k_1 \left(\frac{k_2}{\eta_2} \right) \dot{w} t + k_1 \dot{w} \quad (12) \end{aligned}$$

因試驗時之變位速度為常數，故 $\dot{w} = 0$ ，因此(12)式化簡成

$$\ddot{y} + k_1 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{k_2}{k_1 \eta_2} \right) \dot{y} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} y = k_1 \left(\frac{k_2}{\eta_2} \right) w \quad (13)$$

(13)式為力學模型的微分方程，此微分方程的解，包括通解 y_h 和特解 y_p 。要求通解 y_h ，可令 $y = e^{mt}$ ， $\dot{y} = m e^{mt}$ ， $\ddot{y} = m^2 e^{mt}$ ，並代入(13)式得到

$$m^2 + \left(\frac{\eta_2 k_1 + \eta_1 (k_1 + k_2)}{\eta_1 \eta_2} \right) m + \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2} = 0, \quad (14)$$

由(14)式，得通解為

$$y_h = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}, \quad (15)$$

其中 C_1 和 C_2 為常數， m_1 與 m_2 為不等實根。

有關特解 y_p , 令 $y_p = \bar{C}$, 並代入(13)式得到

$$\frac{k_1 k_2 \bar{C}}{\eta_1 \eta_2} = \frac{k_1 k_2}{\eta_2} w, \quad (16)$$

$$\text{因此 } y_p = \bar{C} = \eta_1 w, \quad (17)$$

由(16)式與(17)式, 可求得

$$f(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \eta_1 w, \quad (18)$$

根據邊界條件 $t = 0$, $f(t) = 0$, 我們可求得係數

$$C_2 = -(C_1 + \eta_1 w), \quad (19)$$

再代回(18)式, 整理得

$$f(t) = C_1 \left(e^{m_1 t} - \left(\frac{\eta_1 w + C_1}{C_1} \right) e^{m_2 t} \right) + \eta_1 w. \quad (20)$$

(20)式為微分方程的完全解(complete solutions), 因 C_1 是常數, m_1 與 m_2 為特徵不等實根, 且滿足根與係數關係。

為求得本研究之水泥漿的材料參數, 將此力學模式(20)式與(5)式水泥漿組構方程對照, 得到:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1.318 \times 10^6 N, \quad \eta_1 w = 1.186 \times 10^4 N, \\ \eta_1 &= 5.93 \times 10^9 N \cdot \text{sec}/m, \quad m_1 = -0.08134, \\ m_2 &= -0.1696. \end{aligned}$$

從試驗我們可以獲知水泥漿之初始應力-應變關係為線彈性, 即 $\sigma = E_e \varepsilon$, 其中 E_e 是水泥漿之線彈性模數, 相當於力學模式之初始階段: $u_2 = u_3 = 0$, $u = u_1$ 及 $f(t) = k_1 u$ 。

由 $f(t) = k_1 u$, $\sigma = E_e \varepsilon$ 及 $\varepsilon = u/L$ 三者關係得:

$$f(t) = \sigma A = E_e \varepsilon A = k_1 u, \quad (21)$$

整理化簡得:

$$k_1 = \frac{E_e A}{L}, \quad (22)$$

從試驗數據得知 $E_e = 11.711 \text{ GPa}$, A 是 $10 \times 20 \text{ cm}$ 試體之橫斷面積 $A = \pi \times (5 \text{ cm})^2 = 78.54 \text{ cm}^2$, $L = 10 \text{ cm}$ 是縱向伸長計長度, 代入(22)式可解得:

$$k_1 = 9.198 \times 10^8 N/m, \quad (23)$$

又由(14)式根與係數關係知道:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= - \left(\frac{\eta_2 k_1 + \eta_1 (k_1 + k_2)}{\eta_1 \eta_2} \right), \\ m_1 m_2 &= \frac{k_1 k_2}{\eta_1 \eta_2}, \end{aligned} \quad (24)$$

且已知 $m_1 = -0.08134$ 及 $m_2 = -0.1696$, 將此結果代入(24)式解得:

$$\eta_2 = 1.333 \times 10^{11} N \cdot \text{sec}/m, \quad k_2 = 1.186 \times 10^{10} N/m.$$

由此推導過程, 可得水灰比 $w/c=0.485$ 之水泥漿的四個力學模式材料參數即, 彈簧係數:

$$k_1 = 9.198 \times 10^8 N/m, \quad k_2 = 1.186 \times 10^{10} N/m, \quad \text{阻尼係數:}$$

$$\eta_1 = 5.93 \times 10^9 N \cdot \text{sec}/m, \quad \eta_2 = 1.333 \times 10^{11} N \cdot \text{sec}/m, \quad \text{且可把(1)式之應力-應變關係式表示為:}$$

$$\sigma(\varepsilon) = 3.71 f_u \left[e^{m_1(\varepsilon \times 10^3)} - 1.009 e^{m_2(\varepsilon \times 10^3)} \right] + 0.0334 f_u \quad (25)$$

因此, 只要知道水泥基複合材料的極限強度, 就可利用(25)式來模擬其應力-應變曲線。

四、結果與討論

為了證明此本研究之四參數力學模型在不同之水灰比的水泥漿或水泥基結合材(Cement-based binders), 也有很好的適用性, 採用 Attiogbe and Darwin [1-2]的試驗數據來模擬與比較。

4.1 模擬水泥漿之應力-應變曲線

水泥漿之水灰比 $w/c=0.5$ ，極限應力 $f_u = 45.79$ MPa [1-2]，其試驗值如圖 3 之實線。先由試誤法決定其彈簧係數：

$$k_1 = 5.8 \times 10^8 \text{ N/m}, k_2 = 5.9 \times 10^9 \text{ N/m},$$

阻尼係數：

$$\eta_1 = 3.1 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{sec/m}, \eta_2 = 5.0 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{sec/m},$$

並代入根與係數關係，即(24)式，可求得此水泥漿之材料參數 $m_1 = -0.10207$ ， $m_2 = -0.21262$ ，把 m_1 、 m_2 和 f_u 代入(25)式之應力-應變關係式得：

$$\sigma(\varepsilon) = 3.71 \times 45.79 \times \left[e^{-0.10207 (\varepsilon \times 10^3)} - 1.009 e^{-0.21262 (\varepsilon \times 10^3)} \right] + 0.0334 \times 45.79 \quad (26)$$

即可把理論模擬之水泥漿應力-應變圖求出，如圖 3 之點線曲線(dot line)。由圖 3 知，試驗值和理論模擬值非常地吻合。

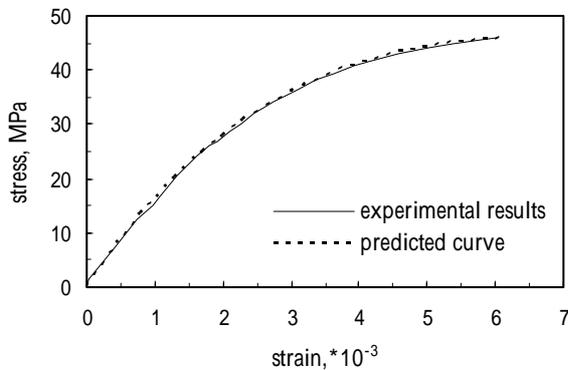


圖 3 $w/c=0.5$ 水泥漿之應力-應變圖

4.2 模擬水泥砂漿之應力-應變曲線

水泥砂漿之水灰比 $w/c=0.5$ ，極限應力 $f_u = 40.3$ MPa [1-2]，其試驗值如圖 4 之實線。從試驗值(圖 3 和圖 4)得知，水泥砂漿在極限應力前之楊氏模數 E 值都比水泥漿大，表示水泥砂漿之材料勁度大，因此可知其力學模型之 k 值和 η 值應該也比水泥漿的 k 值和

η 值大，由此推論，再用試誤法決定其彈簧係數：

$$k_1 = 1.9 \times 10^9 \text{ N/m}, k_2 = 1.6 \times 10^{10} \text{ N/m},$$

阻尼係數：

$$\eta_1 = 5.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{sec/m}, \eta_2 = 6.3 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{sec/m},$$

同樣代入根與係數關係，可求得此水泥砂漿之材料參數 $m_1 = -0.21477$ ， $m_2 = -0.44936$ ，把 m_1 、 m_2 和 f_u 代入(25)式之應力-應變關係式得：

$$\sigma(\varepsilon) = 3.71 \times 40.3 \times \left[e^{-0.21477 (\varepsilon \times 10^3)} - 1.009 e^{-0.44936 (\varepsilon \times 10^3)} \right] + 0.0334 \times 40.3 \quad (27)$$

同樣可把理論模擬之水泥砂漿應力-應變圖求出，如圖 4 之點線曲線。由圖 4 知，試驗值和理論模擬值在極限強度前，也是十分地吻合。

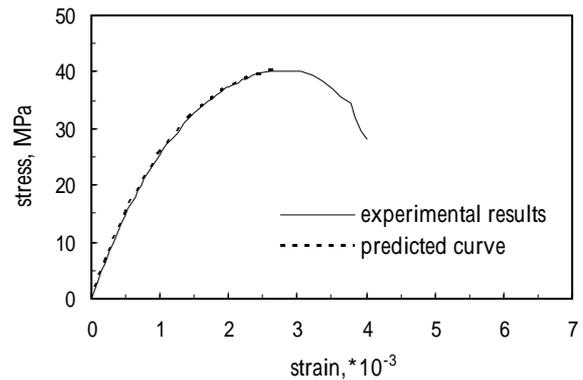


圖 4 $w/c=0.5$ 水泥砂漿之應力-應變圖

五、結論

雖然目前也有許多文獻記載預測水泥砂漿和混凝土應力-應變曲線的模式[6-12]，但因為其參數的設定是根據實驗條件，而不是混凝土本身個別性質，導致無法找出一個可以完全表示混凝土行為和實驗條件的普遍應力-應變關係式。經由本研究試驗及文獻上之試驗值來驗證柏格四參數模型發現，柏格質流模型可以代表水泥漿和水泥基材的非線性應力-應變行為，尤其在模擬材料極限強度前之應力-應變曲線的結果非常理想。因此，未來利用柏格質流模型來模擬水泥基材行為，並配合相關複合材料理論或微觀力學理論，將可進一步預測混凝土力學行為。

誌謝

本研究計畫部分經費由國科會贊助，編號 NSC 92-2211-E-151-008，特此致謝。

Relationship of Confined and Unconfined Concrete,” *ACI Materials J.*, pp. 484-490, (1996).

參考文獻

1. Attiogbe, E. K. and Darwin D., “Submicrocracking in Cement paste and Mortar,” *ACI Materials J.*, pp. 491-500, (1987).
2. Attiogbe, E. K. and Darwin D., “Strain due to Submicrocracking in Cement paste and Mortar,” *ACI Materials J.*, pp.3-11, (1988).
3. Young, J. F., Mindess, S., Grav, R. J. and Bentur, A., *The science and technology of civil engineering materials*, Prentice Hall, New Jersey, (2000).
4. Fung, Y. C., *A first course in continuum mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, (1994).
5. Mehta, K. P. and Monteiro Paulo J. M., *Concrete Microstructure, properties and materials*, (2001).
6. Wee, T. H., Chin, M. S. and Mansur, M. A., “Stress-Strain Relationship of High-Strength Concrete in Compression,” *J. Materials in Civil Engineering*, pp. 70-76, (1996).
7. Desayi, P. and Krishnan, S., “Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete,” *ACI J.*, pp. 345-350, (1964).
8. Popovice, S., “A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain curve of Concrete,” *Cement and Concrete Research*, Vol. 3, pp. 583-599, (1973).
9. Carreira, D. J. and Chu, K. H., “Stress-Strain Relationship for plain Concrete in Compression,” *ACI J.*, pp. 797-804, (1985).
10. Almusallam, T. H. and Alsayed, S. H., “Stress-Strain Relationship of Normal, High-Strength and Lightweight Concrete,” *Magazine of Concrete Research*, pp. 39-44, (1995).
11. Wang, P. T., Shah, S. P. and Naaman, A. E., “Stress-Strain Curves of Normal and Lightweight Concrete in Compression,” *ACI J.*, pp. 603-611, (1978).
12. Attard, M. M. and Setunge, S., “Stress-Strain

Mechanics Model for the Stress-Strain Curve of Cement-Matrix Composites

Huang Hsing Pan

*Department of Civil Engineering, Kaohsiung University
of Applied Sciences, Kaohsiung, Taiwan 807, R.O.C.,
Professor*

Tsung-Hui Kuo

*Department of Architecture, National KangShan
Agricultural & Industrial Vocational Senior High School,
KangShan 820, Taiwan, R.O.C., Teacher*

ABSTRACT

A theoretical mechanics model for the stress-strain behavior of cement-matrix composites has been found, and that used to simulate the stress-strain curves. We apply the uniaxial compression to cement paste by using strain control, and determine the Young modulus, the Poisson ratio and stress-strain curves of the material. From the trial and error method and computer simulations, the simulated stress-strain curves of cement paste are found. According to the simulated curves and the Burger rheological model, four spring and dash-pot parameters for cement paste are finally determined. The developed mechanics model can well simulate the stress-strain curves of cement paste by choosing some suitable spring and dash-pot parameters. By comparing with others experiments, it also shows that the Burgers mechanics model can be used to represent the stress-strain relationship of cement-matrix composites.

Keywords: Cement-matrix composite, Stress-strain curve, Mechanics model.