

高溫作用後鋼纖維活性粉混凝土應力-應變行為-理論模擬

Simulated Theory of Stress-Strain Curves of Steel Fiber Reinforced Reactive Powder Concrete after Elevated Temperature

潘煌鏗¹ 戴毓修² 龔盈年³

¹國立高雄應用科技大學土木工程系教授

²陸軍軍官學校土木工程學系副教授

³國立成功大學土木工程博士生

摘要

本研究利用理論模擬高溫作用後之活性粉混凝土，在靜態荷載下之應力-應變行為，研究之過程中將不添加鋼纖維活性粉混凝土視為基材，將加入 1%、2%、3% 體積率的鋼纖維所構成之活性粉混凝土視為複合材料。除了利用四參數力學模型來模擬活性粉混凝土之不同高溫作用後應力-應變曲線行為，並採用介質理論與正割模數法來預測高溫作用後活性粉混凝土複合材料應力-應變行為，再與試驗所得到之結果進行比較，以驗證理論方法的可靠性。研究結果顯示，由四參數力學模型模擬靜態荷載下活性粉混凝土應力-應變行為，與試驗所得應力-應變曲線比較後相當接近。經由所模擬的基材應力-應變曲線，再配合介質理論預測活性粉混凝土複合材料的應力-應變曲線，發現介質理論預測結果在線彈性範圍內大致良好。

關鍵字：高溫、活性粉混凝土、介質理論

Abstract

This research is to investigate on the stress-strain curve of RPC composites after elevated temperature by experiments and theoretical predictions. The composite material is examined with RPC mortar as the matrix, and three volume concentrations, 1%, 2% and 3%, of the steel fiber as the inclusion respectively. By four-parameter mechanics model in term of elevated temperature is proposed to simulate the stress-strain curves of the RPC matrix and composites. From the simulated results of the RPC matrix, the mean-field approach and the secant modulus method are used to predict the stress-strain relationship of the RPC composites.

Results show that four-parameter mechanics model simulated stress-strain curves and the experimental ones are pretty close. Through matrix stress-strain curve and composites curve, it shows that predictable curve calculated from inclusion theory and the test curve are closed to each other in the condition of the elastic range.

Keywords: elevated temperature, reactive powder concrete, inclusion theory

一、前言

纖維混凝土(fiber reinforced concrete, FRC)是近年來迅速發展的一種水泥基複合材料，並藉由添加金屬纖維、合成纖維或天然有機纖維，可使混凝土的抗拉強度、抗彎強度及抗衝擊能力等大幅度提高[1]。其中，發展最快且應用最廣的是鋼纖維混凝土，其次是合成纖維和玻璃纖維混凝土。隨著混凝土研究與應用技術的進步，特別是高性能減水劑的發明，使得高性能混凝土(high performance concrete, HPC)蓬勃發展。與普通混凝土相比，高性能混凝土的優點在於透過配比技術改良，使得材料內部的緻密性與微觀結構得到大幅的改善，進而具有高強度、高工作度和高耐久性等優越的性能[2]。活性粉混凝土(reactive powder concrete, RPC)，是 Richard 等[3-4]所研發成功的一種具鋼纖維的超高性能水泥基複合材料，其主要是去除粗骨材，並採用最大粒徑為 $400\mu\text{m}$ 的石英砂，增加了材料的均勻性，同時透過最佳粒徑配料及凝固過程中加壓，提高混凝土的密實度，使得微裂縫和孔隙等缺陷大幅降低，同時，抗壓強度和耐久性亦大幅度地提升高，成為一種強度和性能都十分優異的新型水泥基複合材料[3-6]。然而，對於一般鋼筋混凝土結構而言，除了承受靜態與動態荷載之外，有時亦會承受因火災而伴隨產生的溫度荷載。在持續的高溫作用下，混凝土內部由於水分蒸發、水泥漿體失水收縮、骨材受熱膨脹破裂、砂漿與粗骨材之熱變形量不一致等因素，導致強度折減，或因持續高溫導致混凝土爆裂。因此，瞭解活性粉混凝土在高溫作用後力學行為尤其重要。

近代求複合材料彈性模數的理論很多，其中有 Eshelby[7]於 1957 年所提出的橢球體介質理論，Mori-Tanaka[8]的基材平均應力理論以及雙介質理論(double-inclusion theory) [9]。利用 Mori-Tanaka 方法來決定雙相複合材料的有效彈性模數，這方法是基於 Eshelby 的等值轉換應變(或特徵應變)，可獲得高含量複合材料基材與介質的平均應力及應變。依據此理論的複合材料有效體積模數(κ)及有效剪力模數(μ)的上下界限，可由基材的軟相及硬相所決定，且已證實所求得的有效體積模數及有效剪力模數預測都落在 Hashin-Shtrikman[10]的下界或上界之內。結合應用 Mori-Tanaka 理論在彈性階段的平均應力觀念，以及 Hill's[11]用正割理論來描述基材的塑性行為。將上述顆粒加強複合材料的塑性理論引用到本研究的脆性材料(RPC)，其中基材保持具有非線性行為，來進行預測高溫後活性粉混凝土複合材料的應力-應變曲線的行為。

本研究將針對具有不同纖維含量之活性粉混凝土在高溫作用後之力學行為進行試驗研究，並建立一套混凝土力學理論來分別模擬及預測在靜態加載速率與高溫作用後之活性粉混凝土材料的應力-應變行為，再和活性粉混凝土試驗結果比較，研究結果將可提供工程應用與設計之參考。

二、活性粉混凝土力學模型與理論

2.1 靜態荷載下溫度與活性粉混凝土力學模型

許多材料都有黏彈性的特性(features of viscoelasticity)，且有許多研究[12-13]以各種力學模型來模擬材料的黏彈性行為(viscoelastic behavior)，而這些系統通常是以線性彈簧(spring)的彈簧常數 k 及阻尼(dashpot)的黏滯係數 η 所組成，所以固體的黏彈性行為可藉由此兩基本元素所構成，以不同的組合方式來達到材料的實際行為。

本研究將利用彈簧-阻尼組合成的四參數力學模型[14]，加入溫度的影響，來模擬 RPC 在擬

靜態加載速率下的應力-應變曲線，如圖 1 所示。

在圖 1 中， $f(t)$ 為外力(加載時間 t 的函數)， $k_1(T)$ 及 $k_2(T)$ 為彈簧常數(溫度的函數)， $\eta_1(T)$ 及 $\eta_2(T)$ 為阻尼係數(溫度的函數)， δ_1 為 $k_1(T)$ 處的位移量， δ_2 為 $\eta_1(T)$ 處的位移量，為 $k_2(T)$ 及 $\eta_2(T)$ 的位移量。若 f_1 為 $k_1(T)$ 處的內力、 f_2 為 $\eta_1(T)$ 處的內力， f_3 為 $k_2(T)$ 及 $\eta_2(T)$ 的內力，由圖 1 中的串-並聯關係得知：

求得 RPC 基材應力-應變曲線的數學通式，表示如下：

$$\frac{\sigma}{f_c} = 3.71 \left[e^{m_1(\varepsilon \times 10^3)} - \left(1 + 0.27 \frac{\dot{\varepsilon}}{A} \cdot \frac{L}{f_c} \eta_1(\dot{\varepsilon}) \right) e^{m_2(\varepsilon \times 10^3)} \right] + \eta_1(\dot{\varepsilon}) \frac{\dot{\varepsilon}}{A} \cdot \frac{L}{f_c} \quad (1)$$

故利用 RPC 複合材料的應力-應變曲線，以試誤法求得各齡期的四參數值後，便可模擬求得在 MTS 擬靜態加載速率下，RPC 複合材料受不同作用溫度之應力-應變曲線，再利用迴歸分析的方法，即可得知四參數與作用溫度的關係，可做為模擬受不同高溫作用後之 RPC 複合材料應力-應變曲線的依據。當然(1)式亦可用來模擬 RPC 複合材料在等速率加載下各溫度之不同應變速率下的應力-應變曲線。

2.2 活性粉混凝土複合材料應力-應變行為

本試驗為單軸抗壓試驗，因此可量測軸 RPC 基材向應變 ε_{11}^0 方向變形，而 ε_{22}^0 及 ε_{33}^0 方向的應變計算式為：

$$\varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{33}^0 = -\nu_0 \varepsilon_{11}^0 \quad (2)$$

而 ε_{11}^* 、 ε_{22}^* 及 ε_{33}^* 的計算式則為

$$\langle \varepsilon_{11}^* \rangle = A_1 \varepsilon_{11}^0 + A_2 (\varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0) \quad (3)$$

$$\langle \varepsilon_{22}^* \rangle = A_1 \varepsilon_{22}^0 + A_2 (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{33}^0) \quad (4)$$

$$\langle \varepsilon_{33}^* \rangle = A_1 \varepsilon_{33}^0 + A_2 (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) \quad (5)$$

式中 A_1 及 A_2 值計算方式列於附錄 A 中。

所以由(3)、(4)及(5)式代回複合材料之平均正向應變和(average hydrostatic strain) $\bar{\varepsilon}_{kk}$ 式(6)，可改寫成

$$\bar{\varepsilon}_{kk} = \varepsilon_{kk}^0 + c_1 \langle \varepsilon_{kk}^* \rangle \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}^0 + c_1 \langle \varepsilon_{11}^* \rangle = \varepsilon_{11}^0 + c_1 [A_1 \varepsilon_{11}^0 + A_2 (\varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0)] \quad (7)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22}^0 + c_1 \langle \varepsilon_{22}^* \rangle = \varepsilon_{22}^0 + c_1 [A_1 \varepsilon_{22}^0 + A_2 (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{33}^0)] \quad (8)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33}^0 + c_1 \langle \varepsilon_{33}^* \rangle = \varepsilon_{33}^0 + c_1 [A_1 \varepsilon_{33}^0 + A_2 (\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0)] \quad (9)$$

考慮 RPC 複合材料在單軸載重試驗中，在應力施加平行及垂直方向皆有應變產生，但只有

在單軸載重的方向有應力 $\bar{\sigma}_{11}$ 產生，故求得 RPC 複合材料的應變 $\bar{\varepsilon}_{11}$ 後，利用虎克定律(Hooke's law)：

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] \quad (10)$$

可求得所對應的應力，但(10)式只求得 RPC 複合材料在彈性範圍階段的應力，因此利用所求得複合材各正割點的應變，再配合正割模數的觀念延伸至應力-應變的非線性階段，如圖 2 所示，將(10)式修正成下式：

$$\bar{\sigma}_{11}(\varepsilon) = \frac{E^s(\varepsilon^0)}{(1+\nu^s)(1-2\nu^s)} [(1-\nu^s)\bar{\varepsilon}_{11} + \nu^s(\bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33})] \quad (11)$$

式中 ν^s 為 RPC 複合材料的正割柏松比，其計算公式如下式

$$\nu^s = \frac{3\kappa^s(\varepsilon^0) - 2\mu^s(\varepsilon^0)}{2[3\kappa^s(\varepsilon^0) + \mu^s(\varepsilon^0)]} \quad (12)$$

故由(11)式可求得不同應變速率之 RPC 基複合材料的應力-應變曲線圖。

三、實驗計畫與方法

3.1 試驗規劃與流程

本研究主要針對 RPC 在高溫作用後的靜態力學試驗，為了改善低水灰比下的工作度，拌和過程中添加了強塑劑，其化學成分為丙烯酸共聚物之陰離子型高分子介面活性劑，試體配比如表 1 所示。表中各組試體差異在於鋼纖維含量的變化，含有 0%、1%、2%及 3%鋼纖維的試體，分別給予 $c_1=0.00$ 、0.01、0.02 及 0.03 的編號。

根據 Richard[3]的研究，活性粉混凝土在水化過程若施以 90°C 的熱處理，將顯著的加速混凝土中火山灰效應的進行，並有效改善水化物的微結構。對此，鄭瑞濱[15]研究結果亦指出活性粉混凝土若能透過熱養護程序，可將 28 天齡期時的強度提早於 7 天達到，可大幅的節省時間成本。因此本研究將灌製後的試體在 2 天後進行拆模，即以相對濕度 100%、溫度 90°C 條件進行養護 7 天。

試驗溫度規劃 8 組溫度:常溫(25°C)、200°C、300°C、400°C、500°C、600°C、700°C 和 800°C，每組 5 顆試體進行單軸抗壓試驗。為確定試體內部溫度已接近目標溫度，製作時在試體中心處預埋一 K 型熱偶計，用以監控混凝土內部溫度變化歷程。

由於 RPC 緻密性非常高，同時透過高溫熱水養護後，試體內部含有大量的水份，為了避免試體在加熱過程中，高溫使水汽化後之孔隙壓力過大而造成試體爆裂，加熱前先利用烘箱在 110°C 下，烘乾 7 天以上，使試體內部所含水分降至最低，而後再放置於高溫爐內加熱，當試體加熱至目標溫度後即停止加熱，並將試體留置爐內自然冷卻，隔日取出進行靜態力學試驗。

3.2 升溫模式

本研究所使用之加熱設備為爐內空間為 300W×300H×300D(mm)之箱型電熱高溫爐，高溫爐之最高溫度為 1204°C，最大升溫速率可達 30°C/min。為了避免升溫速率過快導致 RPC 試體溫差過大而產生高溫爆裂，升溫速率採用 2°C/min，同時為確保爐內試體受熱條件一致，每增加 200°C 後恆溫 30 分鐘，再加熱至目標溫度後(200°C、300°C、400°C、500°C、600°C、700°C、800°C)，恆溫 30 分鐘即停止加熱。

3.3 靜態力學試驗設備

對於高溫作用後活性粉混凝土之單軸抗壓試驗，本研究採用 1000kN MTS 萬能材料試驗機，並採用位移控制，加載速率設為 0.03mm/min，以測得活性粉混凝土受壓狀態下之應力-應變全曲線。

四、結果分析與討論

4.1 四參數模型模擬高溫作用後活性粉混凝土應力-應變行為

本研究以四參數力學模型[14](如圖 1 所示)模擬高溫作用後RPC應力-應變行為，透過電腦模擬四參數力學模型的RPC之應力-應變行為，在擬靜態部份為在固定應變率下分別求得不同溫度 $k_1(T)$ 、 $k_2(T)$ 、 $\eta_1(T)$ 及 $\eta_2(T)$ 四個參數，如表 2 所示， k_1 與 k_2 的單位為N/m，而 η_1 及 η_2 的單位為N-sec/m，分別模擬基材與複合材之應力-應變曲線。

將 MTS 靜態試驗所求得之四個參數值，分別代入(1)及(12)式中可求得擬靜態 5×10^{-6} /s 下，從各溫度與不同介質含量 $c_1=0.00\sim 0.03$ 下，求得應力-應變曲線試驗與模擬比較示意圖，如圖 3 所示。RPC 試驗值與力學模型求得的模擬值比較，其中實線為試驗所求取之應力-應變曲線，點線為力學模型模擬複合材料應力-應變曲線，明顯看出靜態四參數力學模型模擬 RPC 基材應力-應變曲線與試驗所得應力-應變曲線相當接近，故可利用力學模型模擬的 RPC 應力-應變曲線。

4.2 高溫作用後活性粉混凝土複合材料應力-應變曲線預測

由於介質的 S 張量會影響 RPC 複合材料的應力-應變行為預測，而 S 張量與介質細長比 $\alpha(=l/d)$ ， l 為長度、 d 為直徑)有關，而本試驗鋼纖維介質細長比 α 的比值為 60 所示，當介質形狀改變，S 張量的計算值亦會產生變化，進而會影響最終預測的 RPC 複合材料應力-應變行為。在靜態 5×10^{-6} /s 下，對於常溫(25°C)、200°C、300°C、400°C、500°C 及 600°C，三種不同介質體積含量 $c_1=0.01$ 、 $c_1=0.02$ 及 $c_1=0.03$ 的應力-應變曲線，將研究試驗值與介質真實形狀 $\alpha=60$ 的理論值做比較。

在靜態預測結果中，如圖 4~圖 18 所示，整體預測結果良好，但當作用溫度在 400°C 及 500°C，預測結果稍差，可能因高溫造成 RPC 漿體與鋼纖維之熱膨脹變形不諧和所導致。本研究在介質理論預測中，由於忽略在冷卻過程當中，熱應力與熱膨脹因素等影響，造成預測稍差，未來可參考 Pam and Weng[16]對理論公式做修正，將可提高預測結果準確性。

五、結論與建議

1. 本研究中，利用四參數力學公式模擬高溫作用後 RPC 之應力-應變曲線，四參數力學模型適用於靜態應力-應變曲線上升段，但目前尚不適合模擬曲線後半段，未來可延伸四參數力學模型適用於模擬應力-應變全曲線。由於四參數力學公式可藉由試誤法直接找出與試驗曲線相對應之模擬曲線，故模擬結果發現，四參數力學公式模擬結果良好。
2. 由四參數力學模型模擬 RPC 基材的力學性質和應力-應變行為，再以介質理論配合正割模數法可預測 RPC 複合材料的應力-應變曲線。結果顯示，靜態預測結果中，整體預測結果良好，但當作用溫度在 400°C 及 500°C，預測結果稍差，是由於本研究所使用的介質理論假設並未考慮熱膨脹係數影響。
3. 本研究利用介質理論配合正割模數法預測 RPC 複合材應力-應變曲線，由於介質理論不需透過大量試驗，只需知道基材與介質之力學性質就可預測複合材之力學行為，可節省大量時間及成本，相較於模擬可知預測之便利性。

六、參考文獻

- [1] 張孝全，「纖維在混凝土上的應用」，台灣人纖工業會刊，第十三卷，第七期，第 55-61 頁 (2000)。
- [2] 許哲嘉，「高性能混凝土之研究」，國立交通大學材料科學與工程研究所碩士論文，新竹 (1995)。
- [3] Richard, P., "Reactive powder concrete with high ductility and 200MPa~800MPa compressive strength," *ACI SP*, Vol. 144, pp.507- 518 (1994).
- [4] Richard, P., and Cheyrezy, M., "Composition of reactive powder concretes," *Cement and Concrete Research*, Vol. 25, pp. 1501-1511 (1995).
- [5] Cheyrezy, M., Maret, V., and Frouin, L. "Microstructural Analysis of RPC," *Cement and Concrete Research*, Vol. 25, pp.1491-1500 (1995).
- [6] Zanni, H., Cheyrezy, M., Maret, V., Philippot, S., and Nieto, P., "Investigation of hydration and pozzolanic reaction in reactive powder concrete (RPC) using ^{29}Si NMR," *Cement and Concrete Research*, Vol. 26, pp.93-100 (1996).
- [7] Eshelby, J. D., "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Relation Problem", *Proceedings of the Royal Society, London*, Vol. A241, pp.376-396(1957).
- [8] Mori, T. and Tanaka, K., "Average Stress in the Matrix and Average Elastic Energy of Material with Misfitting Inclusions", *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571-574(1973).
- [9] Hori, M. and Sia, N. N., "Double-Inclusion Model and Overall Moduli of Multi-Phase Composite", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 116, pp. 305-309(1994).
- [10] Hashin, Z. and Shtrikman, S., "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behavior of Multiphase Materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solid*, Vol. 11, pp. 127-140(1963).

- [11] Hill, R., "Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Polycrystals", *Journal of the Mechanics and Physics of Solid*, Vol. 13, pp.193-208(1965).
- [12] Young, J. F., Mindess, S., Grav, R. J., and Bentur, A., "The Science and Technology of Civil Engineering Materials", Prentice Hall, New Jersey, 2000.
- [13] Fung, Y. C., "A First Course in Continuum Mechanics, Prentice Hall, New Jersey", 1994.
- [14] Kuo, T.-H., Pan, H. H., and Weng, G. J., "Micromechanics-Based Predictions on the Overall Stress-Strain Relations of Cement-Matrix Composites", ASCE, *J. Engineering Mechanics*, Vol. 134, No. 12, pp. 1045-1052(2008).
- [15] 鄭瑞濱，「活性粉混凝土構件之工程性質研究」，國立台灣大學土木工程研究所碩士論文，台北(2003)。
- [16] Pan, H. H., and Weng, G. J., "Thermal Stress and Volume Change During a Cooling Process Involving Phase Transformation", *Journal of Thermal Stress*, Vol. 15, pp. 1-23(1992).

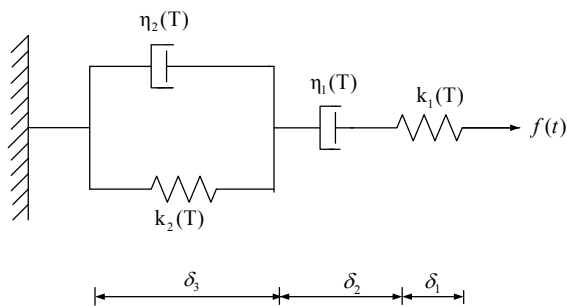


圖 1 高溫作用 RPC 力學模型

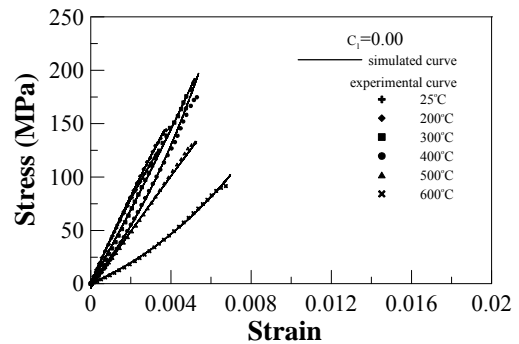


圖 3 力學模型模擬

RPC ($c_1=0.00$) $T=25^{\circ}\text{C}\sim 800^{\circ}\text{C}$ 應力-應變曲線

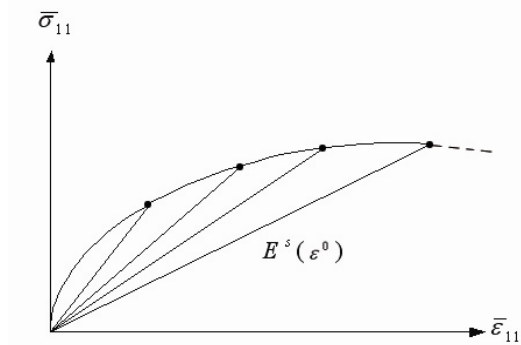


圖 2 複合材料正割模數法應力-應變圖

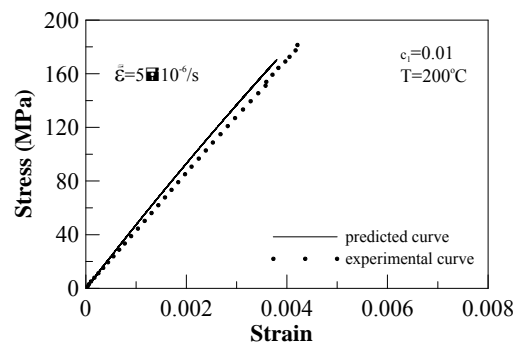


圖 4 $c_1=0.01$ $T=200^{\circ}\text{C}$ 介質理論預測結果

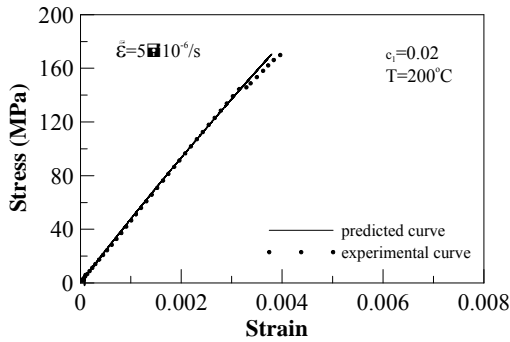


圖 5 $c_1=0.02$ $T=200^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

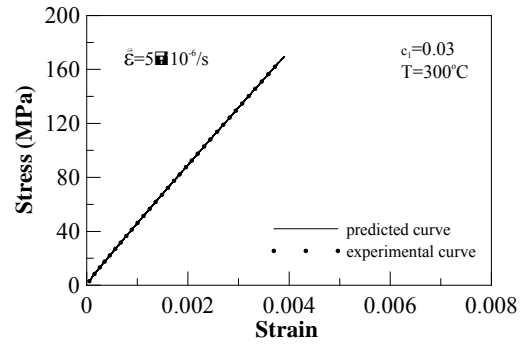


圖 9 $c_1=0.03$ $T=300^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

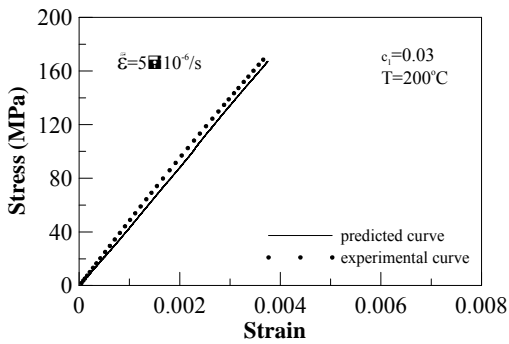


圖 6 $c_1=0.03$ $T=200^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

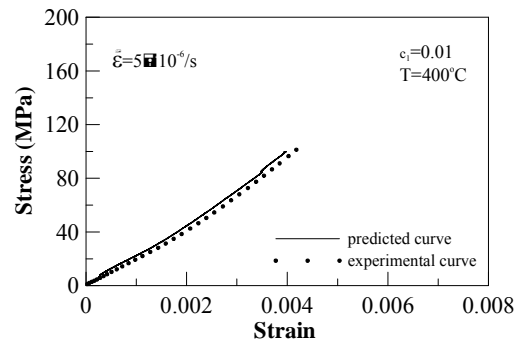


圖 10 $c_1=0.01$ $T=400^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

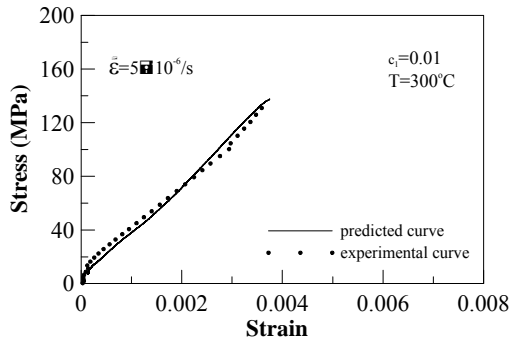


圖 7 $c_1=0.01$ $T=300^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

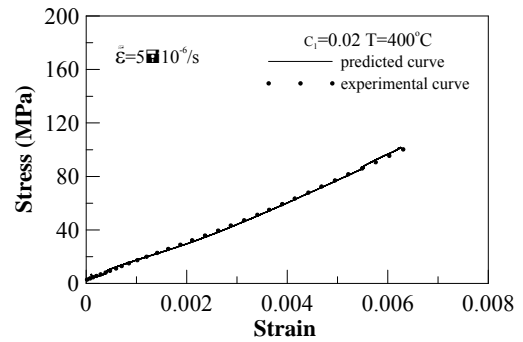


圖 11 $c_1=0.02$ $T=400^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

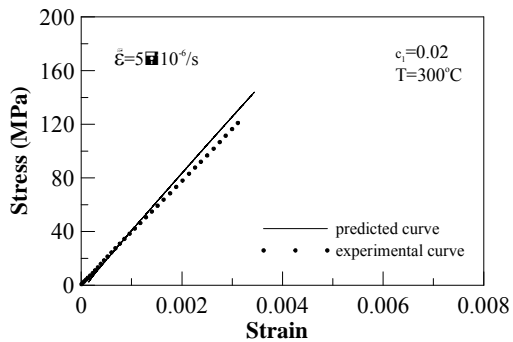


圖 8 $c_1=0.02$ $T=300^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

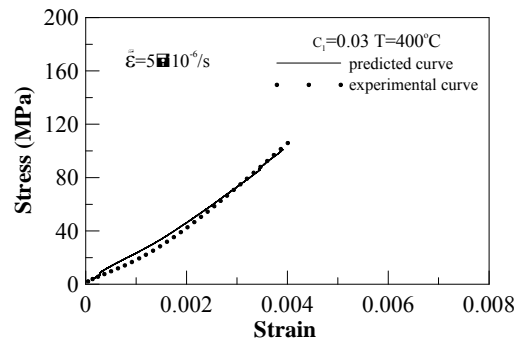


圖 12 $c_1=0.03$ $T=400^\circ\text{C}$ 介質理論靜態結果

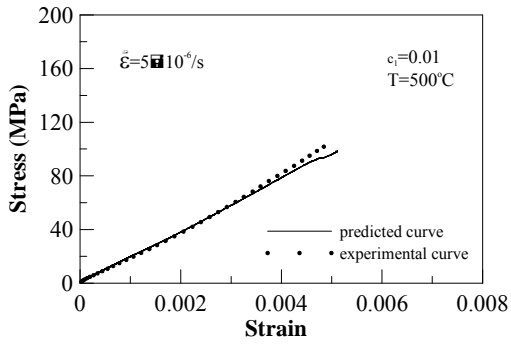


圖 13 $c_1=0.01$ $T=500^\circ\text{C}$ 介質理論靜態結果

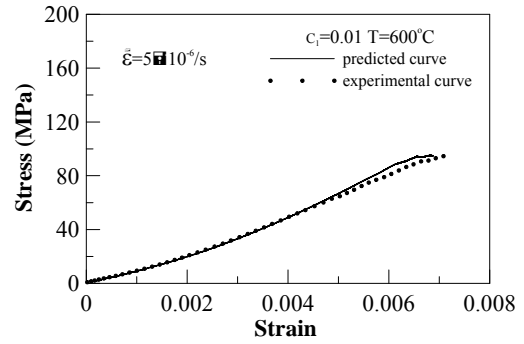


圖 16 $c_1=0.01$ $T=600^\circ\text{C}$ 介質理論靜態結果

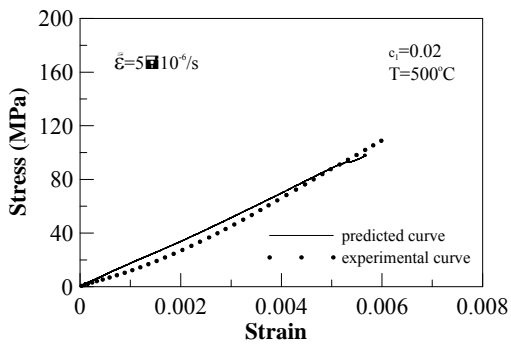


圖 14 $c_1=0.02$ $T=500^\circ\text{C}$ 介質理論靜態結果

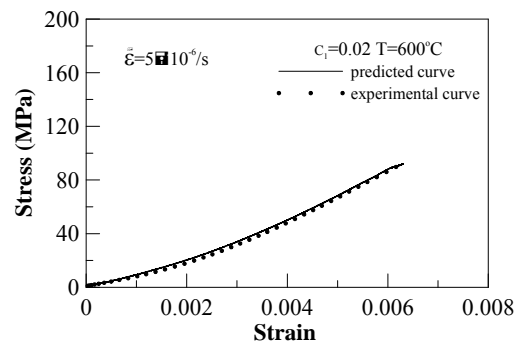


圖 17 $c_1=0.02$ $T=600^\circ\text{C}$ 介質理論預測

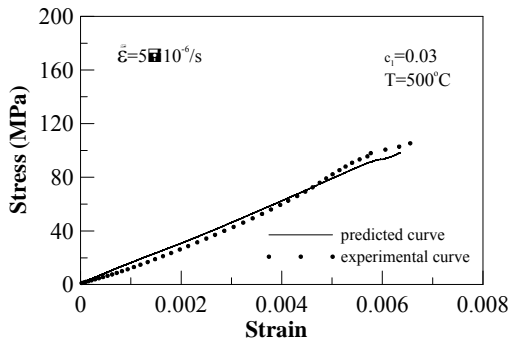


圖 15 $c_1=0.03$ $T=500^\circ\text{C}$ 介質理論靜態結果

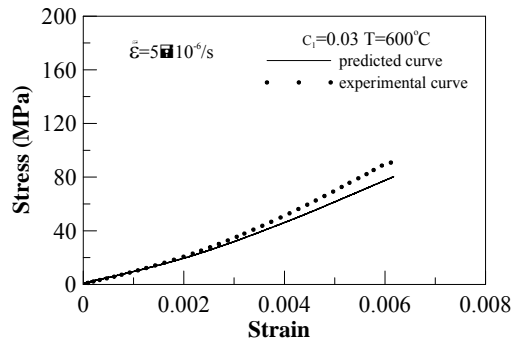


圖 18 $c_1=0.03$ $T=600^\circ\text{C}$ 介質理論預測結果

表 1 RPC 配比表 (kg/m^3)

試體編號	水膠比	水	水泥	矽灰	石英粉	石英砂	強塑劑	鋼纖維(體積)
$c_1=0.00$	0.19	180	714	216	252	944	36	0 %
$c_1=0.01$	0.19	180	714	216	252	918	36	1 %
$c_1=0.02$	0.19	180	714	216	252	891	36	2 %
$c_1=0.03$	0.19	180	714	216	252	865	36	3 %

表 2 活性粉混凝土 $c_1=0.00$ 靜態荷載下四參數值與作用溫度的關係

參數值 作用溫度	$k_1(T)$ (GN/m)	$k_2(T)$ (GN/m)	$\eta_1(T)$ (GN-sec/m)	$\eta_2(T)$ (GN-sec/m)
常溫(25°C)	9.610E-03	4.672E-01	1.818E+00	4.934E+00
200°C	1.279E-04	6.761E-01	2.718E+00	8.038E+00
300°C	3.866E-03	5.479E-01	5.475E-01	8.271E+00
400°C	1.724E-04	4.639E-01	3.984E+00	8.578E+00
500°C	3.596E-03	4.591E-01	1.415E+00	7.731E+00
600°C	2.199E-04	3.664E-01	1.434E-01	1.136E+01

附錄A

a. Eshelby's transformation tensor

1. 介質為圓球體(spheroid)時，S 張量為：

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu_0)} \left\{ 1 - 2\nu_0 + \frac{3\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} - \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right] g \right\}$$

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{3}{8(1-\nu_0)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left[1 - 2\nu_0 - \frac{9}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g$$

$$S_{2233} = S_{3322} = \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} - \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g \right\}$$

$$S_{2211} = S_{3311} = -\frac{1}{2(1-\nu_0)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left\{ \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - (1 - 2\nu_0) \right\} g$$

$$S_{1122} = S_{1133} = -\frac{1}{2(1-\nu_0)} \left[1 - 2\nu_0 + \frac{1}{\alpha^2 - 1} \right] + \frac{1}{2(1-\nu_0)} \left[1 - 2\nu_0 + \frac{3}{2(\alpha^2 - 1)} \right] g$$

$$S_{2323} = S_{3232} = \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} + \left[1 - 2\nu_0 - \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g \right\}$$

$$S_{1212} = S_{1313} = \frac{1}{4(1-\nu_0)} \left\{ 1 - 2\nu_0 - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} - \frac{1}{2} \left[1 - 2\nu_0 - \frac{3(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \right] g \right\}$$

$$g = \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}} \left\{ \alpha(\alpha^2 - 1)^{1/2} - \cosh^{-1} \alpha \right\}$$

當介質形狀為長條狀(cylinder, $\alpha = 60$)， g' 取代 g 為

$$g' = \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}} \left\{ \cos^{-1} \alpha - \alpha(1 - \alpha^2)^{1/2} \right\}$$

A_1 、 A_2 值

$$A_1 = [F_3(15 + c_1(F_1 + F_2)) - 2c_1F_2F_4] / [15(15 + 2c_1F_1) + c_1(F_2(15 - 2c_1F_2)) + c_1F_1(F_1 + F_2)]$$

$$A_2 = [15F_4 + c_1(F_1F_4 - F_2F_3)] / [15(15 + 2c_1F_1) + c_1(F_2(15 - 2c_1F_2)) + c_1F_1(F_1 + F_2)]$$