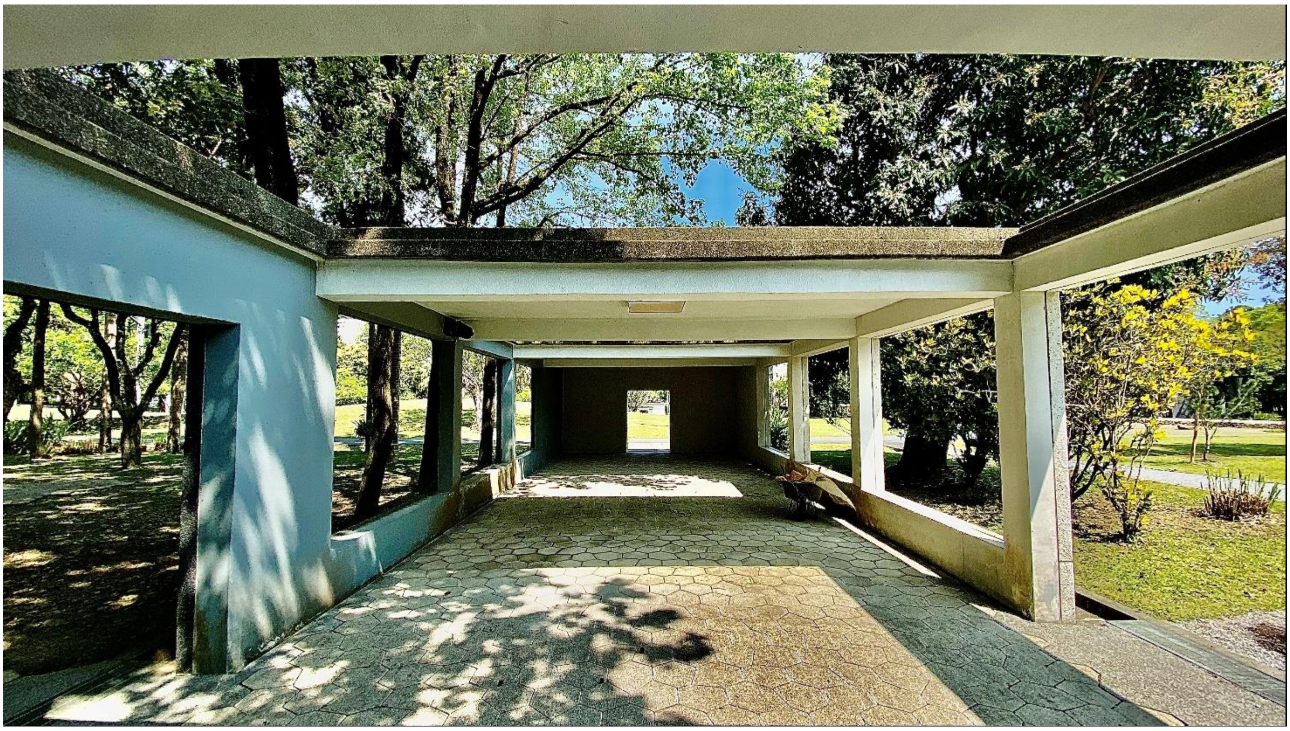
十、兩個母體平均值與比例的統計推論

Chapter 10 Statistical inference about means and proportions with two populations

追尋那道光 李明聰

目錄



學習目標

知識(認知)

1.可以清楚陳述兩個母體平均值之差估計的意涵。

2.可以清楚陳述兩個母體比例之差估計的意涵。

3.可以說明各種狀況下，兩個母體平均值之差假設檢定的程序和標準。

4.可以說明各種狀況下，兩個母體比例之差假設檢定的程序和標準。

5.評價各種情境下，兩個母體平均值與比例之差假設檢定的使用價值。

技能

1.能夠計算各種情境下的檢定統計值。

2.能夠利用檢定統計值與臨界值的比較，提出統計推論。

3.綜合所學，能夠於實務領域中，依據特定情境的需求進行假設檢定程序。

態度(情意)

1.意識到在日常生活或未來工作環境中，兩個母體平均值與比例之差假設檢定的重要性。

2.在各種情境下，依循假設檢定的程序，接受統計推論所傳達的意涵。

本章節論述兩個不同的母體之間特定研究變數平均值之差和比例之差的統計推論。

在實務管理應用領域，驗證商品或服務質與量的標準過程中，時常欲比較兩個不同母體之間的差異性，進而從中提出選擇決策。

章節結構圖

10.1 兩個母體平均值之差的估計：獨立樣本

欲比較深水連鎖餐廳，在特定地區兩個(A 和 B)加盟店的營業額、服務品質、消費者滿意度、消費者消費金額等的差異性。皆屬於兩個不同母體平均值之差的估計。故：例如

μ_1: 母體 1 平均值(A 加盟店營業額的平均值)

μ_2: 母體 2 平均值(B 加盟店營業額的平均值)

兩個母體(加盟店)間平均值之差 = $\mu_1 - \mu_2$

欲估計兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)的數值，其估計程序與單一母體參數(parameter)之點估計(point estimate)類似，分別從兩個母體進行隨機抽樣，獲得兩個母體的樣本平均值$\bar{x}$。

$\bar{x}_1$: 從母體 1 隨機抽出 n_1 個樣本的平均值(例如：某連鎖餐廳 A 加盟店隨機抽取 n_1 天營業額的平均值)

$\bar{x}_2$: 從母體 2 隨機抽出 n_2 個樣本的平均值(例如：某連鎖餐廳 B 加盟店隨機抽取 n_2 天營業額的平均值)

若單從單一母體參數而言，從母體 1 獲得的樣本平均值$\bar{x}_1$，即為母體 1 平均值 μ_1 的點估計值；從母體 2 獲得的樣本平均值$\bar{x}_2$，即為母體 2 平均值 μ_2 的點估計值。

因此，兩個母體(加盟店)間平均值之差 = $\mu_1 - \mu_2$ 的點估計值為 = $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$(兩個樣本平均值之差)。

10.1.1 兩個母體樣本平均值之差的抽樣分布

運用兩個母體**樣本平均值之差**($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布，即可進行兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)的**區間估計**(interval estimate)。進行兩個母體樣本平均值之差的信賴區間估計時，請將樣本平均值較高者設定為第 1 母體，其樣本平均值為$\bar{x}_1$；樣本平均值較低者設定為第 2 母體，其樣本平均值為$\bar{x}_2$。

兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的期望值(Expected value)

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差(standard deviation)

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

其中

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

若分別從母體 1 和 2 所抽取的樣本數量夠大(n_1 > 30 同時 n_2 > 30)，兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會接近於常態分布(normal distribution)。

10.1.2 兩個母體平均值之差的區間估計：樣本數量大

在推估樣本數量多獨立兩個常態分布母體平均值之差的信賴區間時，一共有四種況狀分別為：兩母體變異數已知、兩母體變異數已知且相等、兩母體變異數未知與兩母體變異數未知，但已知相等。

分別從母體 1 和 2 所抽取的樣本數量夠大(n_1 > 30 同時 n_2 > 30)，兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會接近於常態分布。在區間估計的過程中，將樣本平均值較高者設定為母體 1(公式)，樣本平均值較低者設定為母體 2。且母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知，兩個母體平均值之差 $\mu_1 - \mu_2$ 在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計(interval estimation)【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

其中$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ = 標準誤(差)(standard error)，即為$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$。兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。代表樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的分散(離散)程度，可以評量樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣誤差的大小尺度。

$z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$：誤差範圍(margin of error)

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

兩母體變異數已知且相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)，兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\text{可簡化為}|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

其中 σ^2：稱為共同母體變異數(common population variance) $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。代表樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的分散(離散)程度，可以評量樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣誤差的大小尺度。假設兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)為前提，$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$。

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

若母體 1 和 2 標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知時，母體標準(偏)差由樣本標準(偏)差估計，兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差 $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$的點估計值為：

$$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

其中

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	S_1^2	S_1	n_1
母體 2	S_2^2	S_2	n_2

分別從母體 1 和 2 所抽取的樣本數量夠大(n_1 > 30 同時 n_2 > 30)，兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會接近於常態分布。且母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知，兩個母體平均值之差 $\mu_1 - \mu_2$ 在信賴係數 $1-\alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

其中$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的樣本標準(偏)差。代表樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的分散(離散)程度，可以評量樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣誤差的大小尺度。

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	S_1^2	S_1	n_1
母體 2	S_2^2	S_2	n_2

兩母體變異數已知相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)，但實際變異數數值($\sigma^2$)未知，兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1-\alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times S_p \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

其中 $S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2}}$：混合樣本標準(偏)差(pooled sample standard deviation)

$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = S_p \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的樣本標準(偏)差。在兩母體變異數已知相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)為前提之下才成立。

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	S_1^2	S_1	n_1
母體 2	S_2^2	S_2	n_2

兩個母體平均值之差的信賴區間，若包括數值 0 時，代表兩個母體之間平均值沒有達到顯著性的差異性水準。若兩個母體平均值之差的信賴區間沒有包括數值 0 時，代表兩個母體的數值，達到顯著性的差異水準，樣本平均值愈高者，代表其數值顯著性的高於另一個母體的數值。

表　樣本數量多時，兩個母體平均值之差的區間估計

母體變異數	兩母體	信賴區間【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】
已知	變異數不相等	$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
已知	變異數相等	$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$
未知	變異數不相等	$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$
未知	變異數相等	$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

範例 10.1　欲比較奇遇連鎖餐廳，在特定地區兩個加盟店的服務滿意度(0~100 分)。在 R1 餐廳隨機抽取 35 位消費者調查滿意度，其平均滿意度$\bar{x}_1 = 75$，標準(偏)差 $S_1 = 10$；另 R2 餐廳隨機抽取 40 位

消費者調查滿意度，其平均滿意度$\bar{x}_2$ = 70，標準(偏)差 S_2 = 8。試估算兩個加盟店滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間？(信賴區間有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：R1 餐廳樣本數量 n_1 = 35，樣本平均值$\bar{x}_1$ = 75，樣本標準(偏)差 S_1 = 10，R2 餐廳樣本數量 n_2 = 40，樣本平均值$\bar{x}_2$ = 70，樣本標準(偏)差 S_2 = 8，顯著水準 α = 0.05，$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},v=35+40-2} = t_{0.025,73}$ = 1.9930(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

假設**兩母體分布變異數不相等**$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = |75-70| \pm 1.9930 \times \sqrt{\frac{10^2}{35}+\frac{8^2}{40}} = 5 \pm 1.9930 \times \sqrt{2.8571+1.6000} = 5 \pm 1.9930 \times 2.1112 = 5 \pm 4.2076$

因此，兩家加盟店滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間為 0.7924~9.2076。R1 餐廳的滿意度顯著性的高於 R2 餐廳。

假設**兩母體分布變異數相等**$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = |75-70| \pm 1.9930 \times \sqrt{\left(\frac{(35-1)\times 10^2+(40-1)\times 8^2}{35+40-2}\right)\times\left(\frac{1}{35}+\frac{1}{40}\right)} = 5 \pm 1.9930 \times \sqrt{80.7671 \times 0.0536} = 5 \pm 1.9930 \times 8.9871 \times 0.2315 = 5 \pm 4.1456$

因此，兩家加盟店滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間為 0.8544~9.1456。R1 餐廳的滿意度顯著性的高於 R2 餐廳。

使用標準化 Z 值進行運算題解：R1 餐廳樣本數量 n_1 = 35，樣本平均值$\bar{x}_1$ = 75，樣本標準(偏)差 S_1 = 10，R2 餐廳樣本數量 n_2 = 40，樣本平均值$\bar{x}_2$ = 70，樣本標準(偏)差 S_2 = 8，顯著水準 α = 0.05，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025}$ = 1.9600(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = |75-70| \pm 1.9600 \times \sqrt{\frac{10^2}{35}+\frac{8^2}{40}} = 5 \pm 1.9600 \times \sqrt{2.8571+1.6000} = 5 \pm 1.9600 \times 2.1112 = 5 \pm 4.1379$

因此，兩家加盟店滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間為 0.8621~9.1379。R1 餐廳的滿意度顯著性的高於 R2 餐廳。透過標準化 Z 值進行信賴區間的估計時，與透過 t 值進行信賴區間估計獲得的區間數值差異不大。

練習 10.1 欲比較天堂連鎖餐廳，在特定地區兩個加盟店資源回收量。在 K_1 餐廳隨機抽取 31 天資源回收量，其每天資源回收平均重量$\bar{x}_1$ = 85 公斤，標準(偏)差 S_1 = 8 公斤；另 K_2 餐廳隨機抽取 42 天資源回收量，其每天資源回收平均重量$\bar{x}_2$ = 70 公斤，標準(偏)差 S_2 = 7 公斤。(A)試估算兩個加盟店資源回收量之差點估計值？(B)試估算兩個加盟店資源回收量之差在信賴水準 0.90 的信賴區間？(C)試估算兩個加盟店資源回收量之差在信賴水準 0.95 的信賴區間？(信賴區間有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：由於 n_1 = 31 與 n_2 = 42 天，皆大於 30 天，屬於樣本數量較多的情況，母體變異數和標準(偏)差數值未知。

(A)兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1-\mu_2$)點估計值$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| = |85-70|$ = 15 公斤

(B)兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1-\mu_2$)在信賴水準 0.90 的信賴區間。兩個樣本平均值之差($\bar{x}_1-\bar{x}_2$)屬於 t 分布，顯著水準 α = 0.10，$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.10}{2},v=31+42-2} = t_{0.05,71}$ = 1.6666(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

假設**兩母體分布變異數不相等**$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| - t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le |\bar{x}_1-\bar{x}_2| + t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$ → $15 - 1.6666 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}} \le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.6666 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}}$ → $15 - 1.6666 \times 1.7975 \le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.6666 \times 1.7975$ → $12.0042 \le \mu_1-\mu_2 \le 17.9958$

假設**兩母體分布變異數相等**$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$ → $|85-70| \pm 1.6666 \times \sqrt{\left(\frac{(31-1)\times 8^2+(42-1)\times 7^2}{31+42-2}\right)\times\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{42}\right)}$ → $15 \pm 1.6666 \times \sqrt{55.3380 \times 0.0561}$ → $15 \pm 1.6666 \times 7.4390 \times 0.2368 = 15 \pm 2.9356$ → $12.0644 \le \mu_1-\mu_2 \le 17.9356$

(C)兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1-\mu_2$)在信賴水準 0.95 的信賴區間。兩個樣本平均值之差($\bar{x}_1-\bar{x}_2$)屬於 t 分布，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},v=31+42-2} = t_{0.025,71} = 1.9939$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

假設**兩母體分布變異數不相等**$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| - t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le |\bar{x}_1-\bar{x}_2| + t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$ → $15 - 1.9939 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}} \le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.9939 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}}$ → $15 - 1.9939 \times 1.7975 \le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.9939 \times 1.7975$ → $11.4158 \le \mu_1-\mu_2 \le 18.5842$

假設**兩母分布體變異數相等**$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$ → $|85-70| \pm 1.9939 \times \sqrt{\left(\frac{(31-1)\times 8^2+(42-1)\times 7^2}{31+42-2}\right)\times\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{42}\right)}$ → $15 \pm 1.9939 \times \sqrt{55.3380 \times 0.0561}$ → $15 \pm 1.9939 \times 7.4390 \times 0.2368 = 15 \pm 3.5122$ → $11.4878 \le \mu_1-\mu_2 \le 18.5122$

答案：(A) $\mu_1-\mu_2$點估計值 = 15 公斤；(B) $\mu_1-\mu_2$在信賴水準 0.90 的信賴區間 12.00~18.00 公斤；(C) $\mu_1-\mu_2$在信賴水準 0.95 的信賴區間 11.42~18.58 公斤

使用標準化 Z 值進行運算題解：由於 $n_1 = 31$ 與 $n_2 = 42$ 天，皆大於 30 天，屬於樣本數量較多的情況。

(A)兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1-\mu_2$)點估計值$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| = |85-70| = 15$ 公斤

(B)兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1-\mu_2$)在信賴水準 0.90 的信賴區間。兩個樣本平均值之差$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \sim N(85\text{-}70,\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42})$，顯著水準 $\alpha = 0.10$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.10}{2}} = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

$$
\begin{aligned}
|\bar{x}_1-\bar{x}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} &\le \mu_1-\mu_2 \le |\bar{x}_1-\bar{x}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \\
15 - 1.6449 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}} &\le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.6449 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}} \\
15 - 1.6449 \times 1.7975 &\le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.6449 \times 1.7975 \\
12.04 &\le \mu_1-\mu_2 \le 17.96
\end{aligned}
$$

(C)兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1-\mu_2$)在信賴水準 0.95 的信賴區間。兩個樣本平均值之差$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \sim N(85\text{-}70,\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42})$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

$$
\begin{aligned}
|\bar{x}_1-\bar{x}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} &\le \mu_1-\mu_2 \le |\bar{x}_1-\bar{x}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \\
15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}} &\le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{8^2}{31}+\frac{7^2}{42}} \\
15 - 1.96 \times 1.7975 &\le \mu_1-\mu_2 \le 15 + 1.96 \times 1.7975 \\
11.48 &\le \mu_1-\mu_2 \le 18.52
\end{aligned}
$$

答案：(A) $\mu_1-\mu_2$點估計值 = 15 公斤；(B) $\mu_1-\mu_2$在信賴水準 0.90 的信賴區間 12.04~17.96 公斤；(C) $\mu_1-\mu_2$在信賴水準 0.95 的信賴區間 11.48~18.52 公斤

練習 10.2 K1 和 K2 兩市居民每日餐飲費用的分布之標準(偏)差皆為新台幣 35 元。現從 K1 和 K2 兩市各隨機抽取 50 位居民，調查其每日餐飲費用，其平均值分別為$\bar{x}_1$ = 185 元和 $\bar{x}_2$ = 125 元。試估算在信賴係數 95 %下，兩市居民每日餐飲費用之差 δ 的信賴區間？(信賴區間有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：母體標準偏差已知 σ = 35 元。由於 $n_1 = n_2 = 50$ 人 > 30 人屬於數量比較多的情況。信賴係數 95 %，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。樣本平均值分布$\bar{x}_1 \sim N(185, \frac{35^2}{50})$，$\bar{x}_2 \sim N(125, \frac{35^2}{50})$ → $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(185\text{-}125, \frac{35^2}{50} + \frac{35^2}{50})$。

兩市居民每日餐飲費用之差($\delta = \mu_1 - \mu_2$)區間估計 $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$185 - 125 - 1.96 \times \sqrt{\frac{35^2}{50} + \frac{35^2}{50}} \le \mu_1 - \mu_2 \le 185 - 125 + 1.96 \times \sqrt{\frac{35^2}{50} + \frac{35^2}{50}}$$

$$60 - 1.96 \times 7 \le \mu_1 - \mu_2 \le 60 + 1.96 \times 7$$

$$46.28 \le \mu_1 - \mu_2 \le 73.72$$

答案：兩市居民每日餐飲費用之差 δ 的信賴區間 46.28 ≤ δ ≤ 73.72 元

10.1.3 兩個母體平均值之差的區間估計：樣本數量小

在兩個母體皆屬於常態分布時，若有一個或兩個母體樣本數量較少時，分別從母體 1 和 2 所抽取的樣本數量 $n_1 < 30$ 或 $n_2 < 30$，母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知，兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會利用 t 分布進行區間估計。在推估樣本數量少獨立兩個常態分布母體平均值之差的信賴區間時，一共有四種況狀分別為：兩母體變異數已知、兩母體變異數已知且相等、兩母體變異數未知與兩母體變異數未知，但已知相等。

若兩個母體皆屬於常態分布，母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知，兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

其中$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。代表樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的分散(離散)程度，可以評量樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣誤差的大小尺度。

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

若兩個母體皆屬於常態分布，且兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)。且母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知，兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \text{ 可簡化為} |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

其中 σ^2：稱為共同母體變異數(common population variance) $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。代表樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的分散(離散)程度，可以評量樣本平均值之差($\bar{x}_1 -$

$\bar{x}_2$)抽樣誤差的大小尺度。假設兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)為前提，$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$。

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

若兩個母體皆屬於常態分布，母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知，利用 t 分布進行兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

其中$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。代表樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的分散(離散)程度，可以評量樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣誤差的大小尺度。

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{\alpha}{2},v}$其自由度 $v = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\times\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_2-1}\times\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$ 經驗估計值，保守取整數查 t 分布表。

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	S_1^2	S_1	n_1
母體 2	S_2^2	S_2	n_2

若兩個母體皆屬於常態分布，且母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知，需透過母體 1 和 2 的樣本標準(偏)差 S_1 和 S_2 進行點估計，若假設兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)時，母體 1 和 2 的變異數不用分開估算，只要算出一個代表值 σ^2 即可。因此，σ^2 可以用混合估算的方式以 S^2 或S_p^2當作點估計值。

$$S^2 = S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

其中S_p^2：稱為混合樣本變異數(pooled sample variance)

$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}{n_1-1}$，從母體 1 隨機抽取 n_1 樣本數量的樣本變異數

$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_2-1}$，從母體 2 隨機抽取 n_2 樣本數量的樣本變異數

若假設兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)時，$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$的點估計值為$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{S_p^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

利用 t 分布進行兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計時，母體 1 的隨機抽樣樣本的自由度 $v = n_1 - 1$，母體 2 的隨機抽樣樣本的自由度 $v = n_2 - 1$，因此，t 分布的自由度 $v = n_1 + n_2 - 2$。

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{S_p^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \quad \boxed{\text{母體變異數相等}}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

其中$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{S_p^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。假設兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)。

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$自由度 $v = n_1 + n_2 - 2$

	母體標準(偏)差	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1	S_1^2	S_1	n_1
母體 2	σ_2	S_2^2	S_2	n_2

表　樣本數量少時，兩個獨立母體平均值之差的區間估計

母體變異數	兩母體變異數	信賴區間【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】
已知	變異數不相等	$\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
已知	變異數相等	$\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$
未知	變異數不相等	$\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
未知	變異數相等	$\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert \pm t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$

範例 10.2　欲比較 JJ 連鎖餐廳，在特定地區兩個加盟店的服務滿意度(0~100 分)。在 J1 餐廳隨機抽取 14 位消費者調查滿意度，其平均滿意度$\bar{x}_1 = 75$，標準(偏)差 $S_1 = 10$；另 J2 餐廳隨機抽取 15 位消費者調查滿意度，其平均滿意度$\bar{x}_2 = 70$，標準(偏)差 $S_2 = 8$。假設兩家加盟店顧客服務滿意度的變異數相等。試估算兩個加盟店滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間？(信賴區間有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：J1 餐廳樣本數量 $n_1 = 14$，樣本平均值$\bar{x}_1 = 75$，樣本標準(偏)差 $S_1 = 10$，J2 餐廳樣本數量 $n_2 = 15$，樣本平均值$\bar{x}_2 = 70$，樣本標準(偏)差 $S_2 = 8$。顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},14+15-2} = t_{0.025,27} = 2.0518$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

假設**兩家加盟店顧客服務滿意度分布的變異數相等**$\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert \pm t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$

$\rightarrow \lvert 75-70\rvert \pm 2.0518 \times \sqrt{\left(\frac{(14-1)\times 10^2+(15-1)\times 8^2}{14+15-2}\right) \times \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{15}\right)} \rightarrow 5 \pm 2.0518 \times \sqrt{\left(\frac{13\times 100+14\times 64}{27}\right) \times (0.0714 + 0.0667)} \rightarrow 5 \pm 2.0518 \times \sqrt{81.3333 \times 0.1381} \rightarrow 5 \pm 2.0518 \times 3.3514 = 5 \pm 6.8765$

因此，兩家加盟店滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間為–1.88~11.88。兩家加盟店服務滿意度沒有達到顯著性差異水準。

假設**兩家加盟店顧客服務滿意度分布的變異數不相等**。

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{10^2}{14}+\frac{8^2}{15}\right)^2}{\frac{\left(\frac{10^2}{14}\right)^2}{14-1}+\frac{\left(\frac{8^2}{15}\right)^2}{15-1}} = \frac{(7.1429+4.2667)^2}{\frac{(7.1429)^2}{13}+\frac{(4.2667)^2}{14}} = \frac{(11.4095)^2}{3.9246+1.3003} = \frac{130.1772}{5.2250} = 24.91$$ 保守起見取自由度 24

顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{\frac{0.05}{2},24} = t_{0.025,24} = 2.0639$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \rightarrow \lvert 75-70\rvert \pm 2.0639 \times \sqrt{\frac{10^2}{14} + \frac{8^2}{15}} \rightarrow 5 \pm 2.0639 \times 3.3778 \rightarrow 5 \pm 6.9714$

因此，兩家加盟店滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間為–1.97~11.97。兩家加盟店服務滿意度沒有達到顯著性差異水準。

練習 10.3　欲比較萱萱連鎖餐廳，在特定地區兩個加盟店資源回收量。在 K1 餐廳隨機抽取 14 天資源回收量，其每天資源回收平均重量$\bar{x}_1 = 85$ 公斤，標準(偏)差 $S_1 = 8$ 公斤；另 K2 餐廳隨機抽取 12 天

資源回收量，其每天資源回收平均重量$\bar{x}_2$ = 70 公斤，標準(偏)差 S_2 = 7 公斤。假設兩家加盟店資源回收量的變異數相等。(A)試估算兩個加盟店資源回收量之差點估計值？(B)試估算兩個加盟店資源回收量之差在信賴水準 0.90 的信賴區間？(C)試估算兩個加盟店資源回收量之差在信賴水準 0.95 的信賴區間？(信賴區間有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：K1 餐廳樣本數量 n_1 = 14，樣本平均值$\bar{x}_1$ = 85 公斤，樣本標準(偏)差 S_1 = 8 公斤，K2 餐廳樣本數量 n_2 = 12，樣本平均值$\bar{x}_2$ = 70 公斤，樣本標準(偏)差 S_2 = 7 公斤。

(A) 兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1 - \mu_2$)點估計值$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ = 85 – 70 = 15 公斤

(B) 兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴水準 0.90 的信賴區間。顯著水準 α = 0.10，$t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.10}{2},14+12-2}$ = $t_{0.05,24}$ = 1.7109(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \rightarrow |85–70| \pm 1.7109 \times \sqrt{\left(\frac{(14-1)\times 8^2+(12-1)\times 7^2}{14+12-2}\right)\times\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{12}\right)} \rightarrow 15 \pm 1.7109 \times \sqrt{\left(\frac{13\times 64+11\times 49}{24}\right)\times(0.0714+0.0833)} \rightarrow 15 \pm 1.7109 \times \sqrt{57.125\times 0.1548} \rightarrow 15 \pm 1.7109 \times 2.9733 \rightarrow 15 \pm 5.0871$ 公斤，兩個加盟店資源回收量達到顯著性差異水準，K1 顯著性比 K2 多

(C) 兩個加盟店資源回收量之差($\mu_1 - \mu_2$)在信賴水準 0.95 的信賴區間。顯著水準 α = 0.05，$t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},14+12-2}$ = $t_{0.025,24}$ = 2.0639(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \rightarrow |85–70| \pm 2.0639 \times \sqrt{\left(\frac{(14-1)\times 8^2+(12-1)\times 7^2}{14+12-2}\right)\times\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{12}\right)} \rightarrow 15 \pm 2.0639 \times \sqrt{\left(\frac{13\times 64+11\times 49}{24}\right)\times(0.0714+0.0833)} \rightarrow 15 \pm 2.0639 \times \sqrt{57.125\times 0.1548} \rightarrow 15 \pm 2.0639 \times 2.9733 \rightarrow 15 \pm 6.1367$ 公斤，兩個加盟店資源回收量達到顯著性差異水準，K1 顯著性比 K2 多

答案：(A) $\mu_1 - \mu_2$點估計值 = 15 公斤；(B) $\mu_1 - \mu_2$在信賴水準 0.90 的信賴區間 9.91~20.09 公斤；(C) $\mu_1 - \mu_2$在信賴水準 0.95 的信賴區間 8.86~21.14 公斤

練習 10.4 欲比較萱萱連鎖餐廳，在特定地區兩個加盟店服務滿意度(0~10 分)。在 U1 和 U2 餐廳分別隨機抽取 14 位消費者調查滿意度，其滿意度如下表所示。假設兩家加盟店資源回收量的變異數相等。(A)試估算兩個加盟店服務滿意度之差點估計值？(B)試估算兩個加盟店服務滿意度之差在信賴水準 0.90 的信賴區間？(C)試估算兩個加盟店服務滿意度之差在信賴水準 0.95 的信賴區間？

U1 餐廳

5	7	7	8	8	5	5
6	5	5	9	8	6	5

U2 餐廳

3	8	8	8	8	6	5
6	6	5	9	7	6	8

題解：U1 餐廳樣本數量 n_1 = 14，樣本平均值$\bar{x}_1$ = 6.3571 分，樣本標準(偏)差 S_1 = 1.4469 分，U2 餐廳樣本數量 n_2 = 14，樣本平均值$\bar{x}_2$ = 6.6428 分，樣本標準(偏)差 S_2 = 1.6458 分。

(A)兩個加盟店服務滿意度之差($\mu_2 - \mu_1$)的點估計值$\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ = 6.6428 – 6.3571 = 0.2857 分

(B)兩個加盟店服務滿意度之差($\mu_2 - \mu_1$)在信賴水準 0.90 的信賴區間。顯著水準 α = 0.10，$t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.10}{2},14+14-2}$ = $t_{0.05,26}$ = 1.7056(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$|\bar{x}_2 - \bar{x}_1| \pm t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \rightarrow |6.6428 - 6.3571| \pm 1.7056 \times \sqrt{\left(\frac{(14-1)\times 1.4469^2+(14-1)\times 1.6458^2}{14+14-2}\right)\times\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{14}\right)} \rightarrow 0.2857 \pm 1.7056 \times \sqrt{\left(\frac{13\times 2.0934+13\times 2.7088}{26}\right)\times(0.0714+0.0714)} \rightarrow 0.2857 \pm 1.7056 \times \sqrt{2.4011\times 0.1429} \rightarrow 0.2857 \pm 1.7056 \times 0.5857 \rightarrow 0.2857 \pm 0.9989$ 信賴區間數值包含 0，故兩個加盟店服務滿意度未達到顯著性差異水準，U2 沒有顯著性比 U1 高。

(C)兩個加盟店服務滿意度之差($\mu_2 - \mu_1$)在信賴水準 0.95 的信賴區間。顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},14+14-2} = t_{0.025,26} = 2.0555$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$|\bar{x}_2 - \bar{x}_1| \pm t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \rightarrow |6.6428 - 6.3571| \pm 2.0555 \times \sqrt{\left(\frac{(14-1)\times 1.4469^2+(14-1)\times 1.6458^2}{14+14-2}\right)\times\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{14}\right)} \rightarrow 0.2857 \pm 2.0555 \times \sqrt{\left(\frac{13\times 2.0934+13\times 2.7088}{26}\right)\times(0.0714+0.0714)} \rightarrow 0.2857 \pm 2.0555 \times \sqrt{2.4011\times 0.1429} \rightarrow 0.2857 \pm 2.0555 \times 0.5857 \rightarrow 0.2857 \pm 1.2039$ 信賴區間數值有包含 0，故兩個加盟店服務滿意度未達到顯著性差異水準，U2 沒有顯著性比 U1 高。

答案：(A) $\mu_2 - \mu_1$ 點估計值 = 0.2857 分；(B) $\mu_2 - \mu_1$ 在信賴水準 0.90 的信賴區間-0.71~1.28 分；(C) $\mu_2 - \mu_1$ 在信賴水準 0.95 的信賴區間-0.92~1.49 分

10.2 兩個母體平均值之差假設檢定：獨立樣本

若原本兩個母體獨立，分別取自兩個母體的樣本，亦屬於獨立樣本(Independent samples)。

10.2.1 兩個母體平均值之差的假設檢定：樣本數量大

在進行母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)的假設檢定時，若兩母體的樣本數量皆高於 30($n_1 \geq 30$ 且 $n_2 \geq 30$)，屬於樣本數量較大者。樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布接近於常態分布。

兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)的假設檢定可分為三種型態

左尾檢定	雙尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geq 0$	虛無假設 H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$	虛無假設 H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$
對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$	對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$

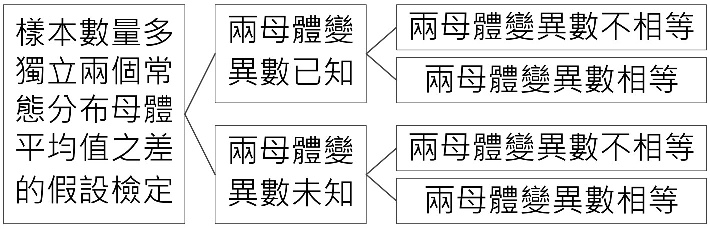
亦可表達成

虛無假設 H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$	虛無假設 H_0: $\mu_1 = \mu_2$	虛無假設 H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$
對立假設 H_1: $\mu_1 < \mu_2$	對立假設 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$	對立假設 H_1: $\mu_1 > \mu_2$

上述三種假設檢定型態，其兩個母體平均值之差($\mu_1 - \mu_2$)在假設檢定時皆以 0 為基準值(預估值、驗證值、猜測值)，亦可以一常數 C 為基準值(預估值、驗證值、猜測值)。

在假設檢定的驗證過程中，將樣本平均值較高者設定為母體 1(公式)，樣本平均值較低者設定為母體 2。

在進行樣本數量多獨立兩個常態分布母體平均值之差的假設檢定時，一共有四種況狀分別為：兩母體變異數已知、兩母體變異數已知且相等、兩母體變異數未知與兩母體變異數未知，但已知相等。



當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2或標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知，在 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 時，檢定統計值為標準化 z 值

$$z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

其中$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2或標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知且相等時($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)，檢定統計值為標準化 z 值

$$z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

其中 σ^2：稱為共同母體變異數(common population variance) $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。假設兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)為前提，$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$。

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2或標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知，在 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 時，檢定統計值為 t 值

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

其中$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的樣本標準(偏)差。

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	S_1^2	S_1	n_1
母體 2	S_2^2	S_2	n_2

當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2或標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知時，惟確認兩者標準(偏)差和變異數(variance)相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)。實務上在評量的過程中，樣本的變異數或標準(偏)差皆可以容易獲得，故此法的實用性不高。檢定統計值為 t 值：

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

其中$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$抽樣分布的樣本標準(偏)差。

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}{n_1-1}$	S_1	n_1
母體 2	$S_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_2-1}$	S_2	n_2

表　樣本數量多時，兩個獨立母體平均值之差假設檢定

母體變異數	兩母體變異數	樣本數量多檢定統計值	樣本數量少檢定統計值
已知	變異數不相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
已知	變異數相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$
未知	變異數不相等	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$
未知	變異數相等	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

在檢定階段，運用樣本檢定用的統計值(樣本平均值之差$\bar{x}_1-\bar{x}_2$)標準化後之檢定統計值─z 值或 t 值與在顯著水準 α 下的標準化臨界值─z_α、$z_{\frac{\alpha}{2}}$、$t_{\alpha,v=n_1+n_2-2}$或$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$值進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1-\mu_2\leq 0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu_1-\mu_2>0$

臨界值(Critical value) $z^*=z_\alpha$

若檢定統計值 $z\leq$ 臨界值 z_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z>$ 臨界值 z_α，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1-\mu_2\geq 0$；對立假設 H_1: $\mu_1-\mu_2<0$。

臨界值(Critical value) $z^*=-z_\alpha$

若檢定統計值 $z\geq$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z<$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1-\mu_2=0$；對立假設 H_1: $\mu_1-\mu_2\neq 0$。

左側(較低)臨界值(Critical value)$z_L^*=-z_{\frac{\alpha}{2}}$；右側(較高)臨界值$z_H^*=z_{\frac{\alpha}{2}}$。

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}\leq$ 檢定統計值 $z\leq$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

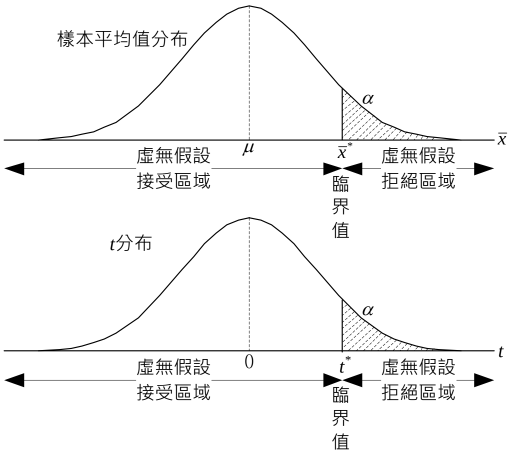
若檢定統計值 $z<$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z>$右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

t 分布

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1 - \mu_2 \le 0$；對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$。

若檢定統計值 $t \le$ 臨界值$t_{\alpha,v=n_1+n_2-2}$(正值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

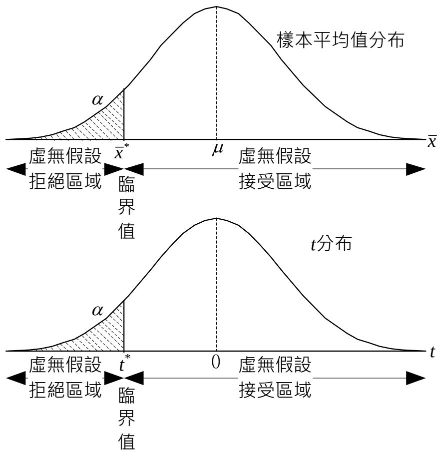
若檢定統計值 $t >$ 臨界值$t_{\alpha,v=n_1+n_2-2}$(正值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1 - \mu_2 \ge 0$；對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$。

若檢定統計值 $t \ge$ 臨界值$-t_{\alpha,v=n_1+n_2-2}$(負值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

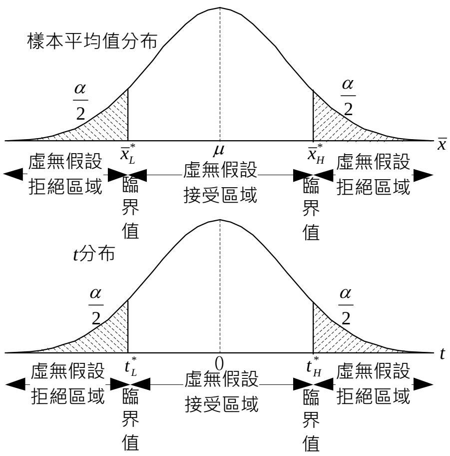
若檢定統計值 $t <$ 臨界值$-t_{\alpha,v=n_1+n_2-2}$(負值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$；對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 \ne 0$。

若左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$(負值) $\le$ 檢定統計值 $t \le$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$(正值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $t <$ 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$(負值)或檢定統計值 $t >$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$(正值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



範例 10.3　奇遇餐廳評估消費者的滿意度(0~10 分)時，欲瞭解男性和女性消費者在接受該餐廳的服務後，其滿意度是否有不同。隨機抽取消費者進行滿意度調查，其中，男性消費者 $n_1 = 35$ 名，其平均滿意度$\bar{x}_1 = 8.60$，標準(偏)差 $S_1 = 1.20$；另外，女性消費者 $n_2 = 32$ 名，其平均滿意度$\bar{x}_2 = 8.20$，標準(偏)差 $S_2 = 1.12$。試評估男性和女性消費者在接受該餐廳的服務後，其滿意度之平均值是否有不同，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定。

題解：男性消費者樣本數 $n_1 = 35$，屬於樣本數量較多者，樣本平均值$\bar{x}_1 = 8.60$，樣本標準(偏)差 $S_1 = 1.20$。女性消費者樣本數 $n_2 = 32$，屬於樣本數量較多者，樣本平均值$\bar{x}_2 = 8.20$，樣本標準(偏)差 $S_2 = 1.12$。希望比較男性和女性消費者滿意度是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.05}{2},v=35+32-2} = -t_{0.025,65} = -1.9971$；右側臨界值$t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},v=35+32-2} = t_{0.025,65} = 1.9971$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

男性和女性消費者滿意度分布變異數不相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} =$

$$\frac{(8.60-8.20)-(0)}{\sqrt{\frac{1.20^2}{35}+\frac{1.12^2}{32}}} = \frac{0.40}{\sqrt{0.0411+0.0392}} = \frac{0.40}{0.2834} = 1.4112$$

男性和女性消費者滿意度分布變異數相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} =$

$$\frac{(8.60-8.20)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(35-1)\times 1.20^2+(32-1)\times 1.12^2}{35+32-2}\right)\times\left(\frac{1}{35}+\frac{1}{32}\right)}} = \frac{0.4-0}{\sqrt{\left(\frac{87.8464}{65}\right)\times(0.02857+0.03125)}} = \frac{0.40}{\sqrt{1.3515\times 0.0598}} = \frac{0.40}{0.2843} = 1.4068$$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -1.9971 \leq$ 檢定統計值 $t = 1.4112 \leq$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = 1.9971$；檢定統計值位於虛無假設接受區域內，故接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。因此，男性和女性消費者在接受該餐廳的服務後，其滿意度相同，沒有顯著性差異。

範例 10.4　奇遇高級西餐廳為從兩位優秀員工中，選出一位擔任經理，讓兩位優秀員工分別輪流擔任實習經理一個月。張小文擔任實習經理期間平均日營業額$\bar{x}_1 = 26200$ 元，日營業額標準(偏)差 $S_1 = 2000$ 元，擔任實習經理天數 $n_1 = 30$ 天；王小娟擔任實習經理期間平均日營業額$\bar{x}_2 = 25000$ 元，日營業額標準(偏)差 $S_2 = 3000$ 元，擔任實習經理天數 $n_2 = 30$ 天。評估兩位優秀員工在擔任實習經理期間每日平均營業額是否相同？

題解：欲檢定兩位優秀員工在擔任實習經理期間每日營業額是否相同，本範例屬於雙尾檢定。

A.定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.05}{2},v=30+30-2} = -t_{0.025,58} = -2.0017$；右側臨界值$t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},v=30+30-2} = t_{0.025,58} = 2.0017$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$ ($\mu_1 - \mu_2 = 0$)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_1 - \mu_2 \neq 0$)。

D.計算檢定統計值：t 值

兩位員工擔任實習經理營業額分布變異數不相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(26200-25000)-0}{\sqrt{\frac{2000^2}{30}+\frac{3000^2}{30}}} = \frac{1200}{658.3} = 1.823$

兩位員工擔任實習經理營業額分布變異數相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(26200-25000)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(30-1)\times 2000^2+(30-1)\times 3000^2}{30+30-2}\right)\times\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{30}\right)}} = \frac{1200-0}{\sqrt{\left(\frac{377000000}{58}\right)\times(0.03333+0.03333)}} = \frac{1200}{\sqrt{6500000\times 0.06667}} = \frac{1200}{658.2806} = 1.8229$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -2.0017$ < 檢定統計值 $t = 1.823$ < 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = 2.0017$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ ($\mu_1 - \mu_2 = 0$)。故推論該兩位優秀員工在擔任實習經理期間每日平均營業額未達顯著性差異水準，應另以其他評估指標區隔兩位優秀員工。

使用標準化 Z 值進行運算題解：本範例屬於雙尾檢定$\bar{x}_1 = 26200$ 元，$S_1 = 2000$ 元，$n_1 = 30$；$\bar{x}_2 = 25000$ 元，$S_2 = 3000$ 元，$n_2 = 30$。

A.定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)：$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.9600$；右側臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.9600$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$ ($\mu_1 - \mu_2 = 0$)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_1 - \mu_2 \neq 0$)。

D.計算檢定統計值：標準化 Z 值

檢定統計值 $Z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{26200-25000}{\sqrt{\frac{2000^2}{30}+\frac{3000^2}{30}}} = \frac{1200}{658.3} = 1.823$

E.左側臨界值$-z_{0.025} = -1.96$ < 檢定統計值 $z = 1.823$ < 右側臨界值 $z_{0.025} = 1.96$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ ($\mu_1 - \mu_2 = 0$)。故推論該兩位優秀員工在擔任實習經理期間每日平均營業額未達顯著性差異水準，應另以其他評估指標區隔兩位優秀員工。

範例 10.5 奇遇速食早餐店欲評估 A 和 B 兩位櫃檯員工，服務客人點餐、結帳、供餐時間是否有差異。假設 A 和 B 兩位櫃檯員工，服務顧客時間變異數未知，但是 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間的變異數相等。在 A 和 B 兩位櫃檯員工服勤時間，隨機抽取消費者調查其服務時間，其中，A 員工服務的消費者 $n_1 = 34$ 名，其平均時間$\bar{x}_1 = 58.2$ 秒，標準(偏)差 $S_1 = 5.2$ 秒；另外，B 員工服務的消費者 $n_2 = 32$ 名，其平均時間$\bar{x}_2 = 50.2$ 秒，標準(偏)差 $S_2 = 5.1$ 秒。試評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間是否有差異性，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定。

題解：$n_1 = 34$，屬於樣本數量較多者，平均時間$\bar{x}_1 = 58.2$ 秒，標準差 $S_1 = 5.2$ 秒，$n_2 = 32$，屬於樣本數量較多者，平均時間$\bar{x}_2 = 50.2$ 秒，標準差 $S_2 = 5.1$ 秒。希望比較 A 和 B 兩位櫃台員工服務消費者時間是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.05}{2},v=34+32-2} = -t_{0.025,64} = -1.9977$；右側臨界值$t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},v=34+32-2} = t_{0.025,64} = 1.9977$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$

A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間分布的變異數不相等，檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(58.2-50.2)-0}{\sqrt{\frac{5.2^2}{34}+\frac{5.1^2}{32}}}$

$= \frac{8}{1.2681} = 6.3086$

A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間分布的變異數相等，檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

$$= \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(58.2-50.2)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(34-1)\times 5.2^2+(32-1)\times 5.1^2}{34+32-2}\right)\times\left(\frac{1}{34}+\frac{1}{32}\right)}} = \frac{8}{\sqrt{\left(\frac{33\times 27.04+31\times 26.01}{64}\right)\times(0.0294+0.0313)}} = \frac{8}{\sqrt{\left(\frac{1698.63}{64}\right)\times 0.0607}} = \frac{8}{1.2693} = 6.3027$$

E.檢定統計值 t = 6.3027 ≥ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$ = 1.9977，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$，接受對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。因此，評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間有差異性，不相等。又因，$\bar{x}_1$ = 58.2 秒 > $\bar{x}_2$ = 50.2 秒，故 A 員工的服務時間比 B 員工長。因此，A 員工明顯需要提升服務效率，減少時間耗費。

使用標準化 Z 值進行運算題解：n_1 = 34，屬於樣本數量較多者，$\bar{x}_1$ = 58.2，S_1 = 5.2，n_2 = 32，屬於樣本數量較多者，$\bar{x}_2$ = 50.2，S_2 = 5.1。希望比較 A 和 B 兩位櫃台員工服務消費者時間是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，左側臨界值(Critical value)：$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.9600$；右側臨界值：$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.9600$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} =$

$$\frac{(58.2-50.2)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(34-1)\times 5.2^2+(32-1)\times 5.1^2}{34+32-2}\right)\times\left(\frac{1}{34}+\frac{1}{32}\right)}} = \frac{8}{\sqrt{\left(\frac{33\times 27.04+31\times 26.01}{64}\right)\times(0.0294+0.0313)}} = \frac{8}{\sqrt{\left(\frac{1698.63}{64}\right)\times 0.0607}} = \frac{8}{1.2693} = 6.3027$$

E.檢定統計值 z = 6.3027 ≥ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1.9600，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$，接受對立假設 H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。因此，評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間有差異性，不相等。又因，$\bar{x}_1$ = 58.2 > $\bar{x}_2$ = 50.2，故 A 員工的服務時間比 B 員工長。因此，A 員工明顯需要提升服務效率，減少時間耗費。

練習 10.5 天堂速食早餐店欲評估 K1 和 K2 兩家肉品供應商，所提供漢堡肉片之重量是否有差異。在冷凍櫃中，隨機抽取 K1 和 K2 兩家供應的肉片，分別其測量重量，其中，K1 供應商抽取樣本數 n_1 = 50 片，重量平均值 222 公克，重量標準(偏)差 25 公克，K2 供應商抽取樣本數 n_2 = 46 片，

重量平均值 212 公克，重量標準(偏)差 22 公克。試評估 K1 和 K2 兩家肉品供應商所提供的漢堡肉片重量是否有差異性，請分別以顯著水準 α = 0.05 和 α = 0.01 進行統計檢定。

題解：n_1 = 50，屬於樣本數量較多者，$\bar{x}_1$ = 222 公克，S_1 = 25 公克，n_2 = 46，屬於樣本數量較多者，$\bar{x}_2$ = 212 公克，S_2 = 22 公克。希望比較 K1 和 K2 兩家肉品供應商所提供的漢堡肉片重量是否有差異性，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05。左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.05}{2},v=50+46-2} = -t_{0.025,94} = -1.9855$；右側臨界值 $t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},v=50+46-2} = t_{0.025,94} = 1.9855$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

假設兩家肉品供應商提供的漢堡肉片重量分布的變異數相等，檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(50-1)\times 25^2+(46-1)\times 22^2}{50+46-2}\right)\times\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{46}\right)}} = \frac{10}{\sqrt{\left(\frac{49\times 625+45\times 484}{94}\right)\times(0.02+0.0217)}} = \frac{10}{\sqrt{\left(\frac{52405}{94}\right)\times 0.0417}} = \frac{10}{4.8239} = 2.0730$

假設兩家肉品供應商提供的漢堡肉片重量分布的變異數不相等，檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\frac{25^2}{50}+\frac{22^2}{46}}} = \frac{10}{4.7981} = 2.0842$(實務上不可能知道母體的實際分布的運算方式)

E.檢定統計值 t = 2.0842 ＞ 右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$ = 1.9855，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，判斷拒絕虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$；接受對立假設 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。因此，評估 K1 和 K2 兩家肉品供應商所提供的漢堡肉片重量有達到顯著差異水準，因 $\bar{x}_1$ = 222 公克 > $\bar{x}_2$ = 212 公克，故 K1 供應商所提供的漢堡肉片重量顯著性的比 K2 供應商所提供者為重。

A.設定顯著水準 α = 0.01，左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.01}{2},v=50+46-2} = -t_{0.005,94} = -2.6292$；右側臨界值 $t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.01}{2},v=50+46-2} = t_{0.005,94} = 2.6292$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

假設兩家肉品供應商提供的漢堡肉片重量分布的變異數相等，檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(50-1)\times 25^2+(46-1)\times 22^2}{50+46-2}\right)\times\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{46}\right)}} = \frac{10}{\sqrt{\left(\frac{49\times 625+45\times 484}{94}\right)\times(0.02+0.0217)}} = \frac{10}{\sqrt{\left(\frac{52405}{94}\right)\times 0.0417}} = \frac{10}{4.8239} = 2.0730$

假設兩家肉品供應商提供的漢堡肉片重量分布的變異數不相等，檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\frac{25^2}{50}+\frac{22^2}{46}}} = \frac{10}{4.7981} = 2.0842$(實務上不可能知道母體的實際分布的運算方式)

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}=-2.6292$ < 檢定統計值 $t=2.0842$ < 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}=2.6292$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1-\mu_2=0$。因此，評估 K1 和 K2 兩家肉品供應商所提供的漢堡肉片重量沒有達到顯著差異水準。

使用標準化 Z 值進行運算題解：$n_1=50$，屬於樣本數量較多者，$\bar{x}_1=222$ 公克，$S_1=25$ 公克，$n_2=46$，屬於樣本數量較多者，$\bar{x}_2=212$ 公克，$S_2=22$ 公克。希望比較 K1 和 K2 兩家肉品供應商所提供的漢堡肉片重量是否有差異性，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha=0.05$。左側臨界值(Critical value)：$z_L^*=-z_{\frac{\alpha}{2}}=-z_{\frac{0.05}{2}}=-z_{0.025}=-1.9600$；右側臨界值$z_H^*=z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{\frac{0.05}{2}}=z_{0.025}=1.9600$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1-\mu_2=0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1-\mu_2\neq 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $\mu_1-\mu_2=0$。

檢定統計值 $z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(50-1)\times 25^2+(46-1)\times 22^2}{50+46-2}\right)\times\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{46}\right)}}=\frac{10}{\sqrt{\left(\frac{49\times 625+45\times 484}{94}\right)\times(0.02+0.0217)}}=\frac{10}{\sqrt{\left(\frac{52405}{94}\right)\times 0.0417}}=\frac{10}{4.8239}=2.0730$(假設母體變異數相同時運算方式)

檢定統計值 $z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\frac{25^2}{50}+\frac{22^2}{46}}}=\frac{10}{4.7981}=2.0842$(實務上不可能知道母體的實際分布的運算方式)

E.檢定統計值 $z=2.0842$ > 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}=1.9600$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，判斷拒絕虛無假設(null hypothesis)H_0: $\mu_1-\mu_2=0$；接受對立假設 H_1: $\mu_1-\mu_2\neq 0$。因此，評估 K1 和 K2 兩家肉品供應商所提供的漢堡肉片重量有達到顯著差異水準，因$\bar{x}_1=222$ 公克 > $\bar{x}_2=212$ 公克，故 K1 供應商所提供的漢堡肉片重量顯著性的比 K2 供應商所提供者為重。

A.設定顯著水準 $\alpha=0.01$，左側臨界值(Critical value)：$z_L^*=-z_{\frac{\alpha}{2}}=-z_{\frac{0.01}{2}}=-z_{0.005}=-2.5758$；右側臨界值：$z_H^*=z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{\frac{0.01}{2}}=z_{0.005}=2.5758$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1-\mu_2=0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1-\mu_2\neq 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $\mu_1-\mu_2=0$。

檢定統計值 $z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(50-1)\times 25^2+(46-1)\times 22^2}{50+46-2}\right)\times\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{46}\right)}}=\frac{10}{\sqrt{\left(\frac{49\times 625+45\times 484}{94}\right)\times(0.02+0.0217)}}=\frac{10}{\sqrt{\left(\frac{52405}{94}\right)\times 0.0417}}=\frac{10}{4.8239}=2.0730$(假設母體變異數相同時運算方式)

檢定統計值 $z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{(222-212)-(0)}{\sqrt{\frac{25^2}{50}+\frac{22^2}{46}}}=\frac{10}{4.7981}=2.0842$(實務上不可能知道母體的實際分布的運算方式)

E.左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}=-z_{0.005}=-2.5758$ < 檢定統計值 $z=2.0842$ < 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}=2.5758$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1-\mu_2=0$。因此，評估 K1 和 K2 兩家肉品供應商所提供的漢堡肉片重量沒有達到顯著差異水準。

10.2.2 兩個母體平均值之差的假設檢定：樣本數量小

在兩個母體皆屬於常態分布時，若有一個或兩個母體樣本數量較少時，分別從母體 1 和 2 所抽取的樣本數量 $n_1 < 30$ 或 $n_2 < 30$，在進行樣本數量少，獨立兩個常態分布母體平均值之差的假設檢定時，一共有四種況狀分別為：兩母體變異數已知、兩母體變異數已知且相等、兩母體變異數未知與兩母體變異數未知，但已知相等。

- 樣本數量少獨立兩個常態分布母體平均值之差的假設檢定
  - 兩母體變異數已知
    - 兩母體變異數不相等
    - 兩母體變異數相等
  - 兩母體變異數未知
    - 兩母體變異數不相等
    - 兩母體變異數相等

當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2或標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知時，檢定統計值為標準化 z 值

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

其中$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$抽樣分布的標準(偏)差。

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2或標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知且相等時，檢定統計值為標準化 z 值

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

其中 σ^2：稱為共同母體變異數(common population variance) $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$抽樣分布的標準(偏)差。假設兩個母體變異數相等($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)為前提，$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$。

	變異數	標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	σ_1^2	σ_1	n_1
母體 2	σ_2^2	σ_2	n_2

當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2與標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知時，檢定統計值為 t 或 t_d 值

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

其中 t 檢定時的臨界值(標準值)為$t_{\frac{\alpha}{2},v}$其自由度 $v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$經驗估計值，保守取整數查 t 分布表。

$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$抽樣分布的樣本標準(偏)差。

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	S_1^2	S_1	n_1

母體 2	S_2^2	S_2	n_2

當兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2與標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 未知時，惟確認兩者母體標準(偏)差(變異數)相等。檢定統計值為 t 或 t_d 值

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

其中 t 檢定時的臨界值(標準值)為$t_{\frac{\alpha}{2},v}=t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$其自由度 $v=n_1+n_2-2$，查 t 分布表。

$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$標準誤(差)(standard error)，即為兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1-\bar{x}_2$)抽樣分布的樣本標準(偏)差。

	樣本變異數	樣本標準(偏)差	隨機抽取的樣本數量
母體 1	$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}{n_1-1}$	S_1	n_1
母體 2	$S_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_2-1}$	S_2	n_2

表　樣本數量少時，兩個獨立母體平均值之差假設檢定

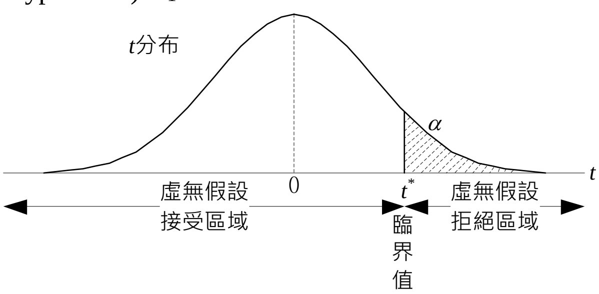
母體變異數	兩母體	檢定統計值	臨界值自由度
已知	變異數不相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	
已知	變異數相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	
未知	變異數不相等	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$	$v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$
未知	變異數相等	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$v=n_1+n_2-2$

在檢定階段，運用樣本統計值(樣本平均值之差$\bar{x}_1-\bar{x}_2$)計算檢定統計值–z 或 t 值與在顯著水準 α 下標準化臨界值–z_α 或$z_{\frac{\alpha}{2}}$值或自由度 v 的臨界值–t 或$t_{\frac{\alpha}{2}}$值進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1-\mu_2\le 0$；對立假設 H_1: $\mu_1-\mu_2>0$。

若檢定統計值 $t\le$ 臨界值 t_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

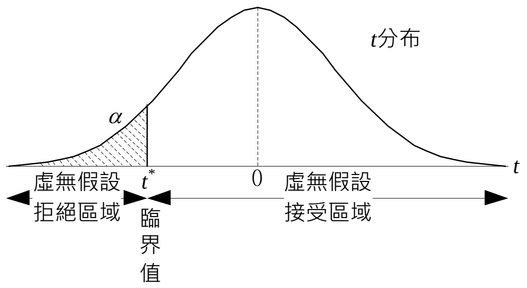
若檢定統計值 $t>$ 臨界值 t_α，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_1-\mu_2\ge 0$；對立假設 H_1: $\mu_1-\mu_2<0$。

若檢定統計值 $t\ge$ 臨界值–t_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 t < 臨界值 $-t_{\alpha}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

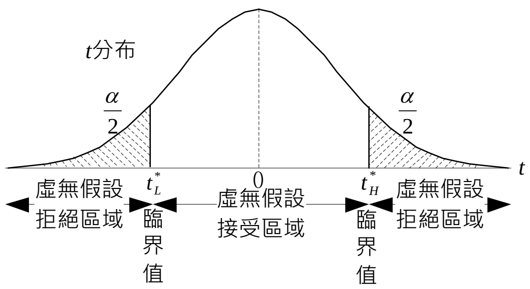


雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$；對立假設 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

左側臨界值 $t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2}}$(負值)；右側臨界值 $t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2}}$(正值)。

若左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2}} \le$ 檢定統計值 $t \le$ 右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 t < 左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2}}$ 或檢定統計值 t > 右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



範例 10.6　奇遇速食早餐店欲評估 A 和 B 兩位櫃檯員工，服務客人點餐、結帳、供餐時間是否有差異。假設 A 和 B 兩位櫃檯員工，服務顧客時間變異數未知，但是 A 和 B 兩位櫃檯員工的變異數相等。在 A 和 B 兩位櫃檯員工服勤時間，隨機抽取消費者調查其服務時間，其中，A 員工服務的消費者 n_1 = 13 名，其平均時間 $\bar{x}_1$ = 58.2 秒，標準(偏)差 S_1 = 5.2 秒；另外，B 員工服務的消費者 n_2 = 12 名，其平均時間 $\bar{x}_2$ = 54.2 秒，標準(偏)差 S_2 = 5.1 秒。試評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間是否有差異性，以顯著水準 α = 0.05 進行統計檢定。

題解：A 員工 n_1 = 13，屬於樣本數量較少者，平均時間 $\bar{x}_1$ = 58.2 秒，標準差 S_1 = 5.2 秒；B 員工 n_2 = 12，屬於樣本數量較少者，平均時間 $\bar{x}_2$ = 54.2 秒，標準差 S_2 = 5.1 秒，自由度 $v = n_1 + n_2 - 2 = 13 + 12 - 2 = 23$。希望比較 A 和 B 兩位櫃台員工服務消費者時間是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，左側臨界值(Critical value)：$-t_{\frac{\alpha}{2},v} = -t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = -t_{0.025,23} = -2.0687$；右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{0.025,23} = 2.0687$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} =$

$$\frac{(58.2-54.2)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(13-1)\times 5.2^2+(12-1)\times 5.1^2}{13+12-2}\right)\times\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{12}\right)}} = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{12\times 27.04+11\times 26.01}{23}\right)\times(0.0769+0.0833)}} = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{610.59}{23}\right)\times 0.1603}} = \frac{4}{2.0629} = 1.9393$$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v}$ = –2.0687 < 檢定統計值 t = 1.9393 < 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v}$ = 2.0687，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。因此，評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間沒有差異性。

練習 10.6 純純速食早餐店欲評估 A 和 B 兩位櫃檯員工，服務客人點餐、結帳、供餐時間是否有差異。在 A 和 B 兩位櫃檯員工服勤時間，隨機抽取消費者調查其服務時間，其中，A 員工服務的消費者 n_1 = 17 名，B 員工服務的消費者 n_2 = 16 名，其時間(秒)分別列於下面表格。試評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間是否有差異性，以顯著水準 α = 0.05 進行統計檢定。

A 員工

52	36	65	58	45	55	65	56	56	58	58	59	45	65	35	55	71

B 員工

35	65	65	65	59	59	58	57	65	62	49	58	59	64	63	59

題解：A 員工 n_2 = 17，樣本數量較少者，平均時間$\bar{x}_2$ = 54.9412 秒，標準差 S_2 = 9.9088 秒；B 員工 n_1 = 16，樣本數量較少者，平均時間$\bar{x}_1$ = 58.8750 秒，標準差 S_1 = 7.6409 秒。希望比較 A 和 B 兩位櫃台員工服務消費者時間是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{7.6409^2}{16}+\frac{9.9088^2}{17}\right)^2}{\frac{\left(\frac{7.6409^2}{16}\right)^2}{16-1}+\frac{\left(\frac{9.9088^2}{17}\right)^2}{17-1}} = \frac{(3.6490+5.7755)^2}{\frac{(3.6490)^2}{16-1}+\frac{(5.7755)^2}{17-1}} = \frac{(9.4245)^2}{0.8877+2.0848} = \frac{88.8208}{2.9724} = 29.88 \text{ 取自由度 } 29$$

A.設定顯著水準 α = 0.05，左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v} = -t_{0.025,29}$ = –2.0452；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{0.025,29}$ = 2.0452(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

$$\text{檢定統計值 } t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(58.8750-54.9412)-(0)}{\sqrt{\frac{7.6409^2}{16}+\frac{9.9088^2}{17}}} = \frac{3.9338}{\sqrt{3.4343+5.7755}} = \frac{3.9338}{3.0348} = 1.2963$$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v}$ = –2.0452 < 檢定統計值 t = 1.2963 < 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v}$ = 2.0452，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。因此，評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間沒有差異性。

練習 10.7 深水速食早餐店欲評估 A 和 B 兩位櫃檯員工，服務客人點餐、結帳、供餐時間是否有差異。在 A 和 B 兩位櫃檯員工服勤時間，隨機抽取消費者調查其服務時間，其中，A 員工服務的消費者 n_1 = 18 名，B 員工服務的消費者 n_2 = 18 名，其時間(秒)分別列於下面表格。試評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間是否有差異性，以顯著水準 α = 0.05 進行統計檢定。

A 員工

52	56	65	58	45	55	65	56	56	58	58	59	45	65	56	55	71	80

B 員工

35	61	32	45	59	59	58	57	55	62	49	58	59	54	63	59	55	35

題解：A 員工 n_1 = 18，樣本數量較少者，平均時間$\bar{x}_1$ = 58.6111 秒，標準差 S_1 = 8.4097 秒；B 員工 n_2 = 18，樣本數量較少者，平均時間$\bar{x}_2$ = 53.0556 秒，標準差 S_2 = 9.8008 秒。希望比較 A 和 B 兩位櫃台員工服務消費者時間是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{8.4097^2}{18}+\frac{9.8008^2}{18}\right)^2}{\frac{\left(\frac{8.4097^2}{18}\right)^2}{18-1}+\frac{\left(\frac{9.8008^2}{18}\right)^2}{18-1}} = \frac{(3.9290+5.3364)^2}{\frac{(3.9290)^2}{18-1}+\frac{(5.3364)^2}{18-1}} = \frac{(9.2654)^2}{0.9081+1.6751} = \frac{85.8482}{2.5832} = 33.23$$ 取自由度 33

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2},v} = -t_{\frac{0.05}{2},33} = -t_{0.025,33} = -2.0345$；右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{\frac{0.05}{2},33} = t_{0.025,33} = 2.0345$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(58.6111-53.0556)-(0)}{\sqrt{\frac{8.4097^2}{18}+\frac{9.8008^2}{18}}} = \frac{5.5556}{\sqrt{3.9290+5.3364}} = \frac{5.5556}{3.0439} = 1.8251$

E.左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2},v} = -2.0345$ < 檢定統計值 $t = 1.8251$ < 右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2},v} = 2.0345$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$。因此，評估 A 和 B 兩位櫃檯員工服務顧客時間沒有差異性。

練習 10.8 某研究團隊想要評估有無規律運動與收縮壓間的相關性，收集 125 名有規律運動者及 123 名無規律運動者，以比較有無規律運動的收縮壓平均值的差異，結果如下：(113 年第二次專門職業及技術人員高等考試生物統計學)

組別	人數	收縮壓平均值(毫米汞柱)	收縮壓標準差(毫米汞柱)
有規律運動組	125	122.8	19.2
無規律運動組	123	142.5	23.6

(一)請列出本問題之統計虛無假說及對立假說，並以適當的統計方法檢定有無規律運動組的收縮壓平均值是否有統計上的差異？設顯著水準 $\alpha = 0.05$。

(二)當顯著水準改為 $\alpha = 0.01$ 時，本題檢定結果的 p 值是否會改變？本研究的結論是否會改變？請解釋其原因。

題解：有規律運動組樣本數 $n_1 = 125$，無規律運動組樣本數 $n_2 = 123$，屬於樣本數量較多者。希望比較有規律運動組和無規律運動組收縮壓是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

(一)請列出本問題之統計虛無假說及對立假說，並以適當的統計方法檢定有無規律運動組的收縮壓平均值是否有統計上的差異？設顯著水準 $\alpha = 0.05$。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.05}{2},v=125+123-2} = -t_{0.025,246} = -1.9697$；右側臨界值 $t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},v=125+123-2} = t_{0.025,246} = 1.9697$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

有規律運動組和無規律運動組滿意度分布變異數不相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(122.8-142.5)-(0)}{\sqrt{\frac{19.2^2}{125}+\frac{23.6^2}{123}}} = \frac{-19.7}{\sqrt{2.9491+4.5281}} = \frac{-19.7}{2.7345} = -7.2044$

有規律運動組和無規律運動組滿意度分布變異數相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} =$

$$\frac{(122.8-142.5)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(125-1)\times 19.2^2+(123-1)\times 23.6^2}{125+123-2}\right)\times\left(\frac{1}{125}+\frac{1}{123}\right)}} = \frac{-19.7-0}{\sqrt{\left(\frac{113660.5}{246}\right)\times(0.00800+0.00813)}} = \frac{-19.7}{\sqrt{462.0345\times 0.01613}} = \frac{-19.7}{2.7300} = -7.2162$$

E.檢定統計值 t = -7.2044 ≤ 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$ = –1.9697 ≤ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$ = 1.9697；檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，故接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1-\mu_2 \neq 0$。因此，「有規律運動組」和「無規律運動組」收縮壓有顯著性差異，因「無規律運動組」收縮壓平均值 142.5 mmHg 比「有規律運動組」收縮壓平均值 122.8 mmHg 高，故推論「無規律運動組」收縮壓顯著性的高於「有規律運動組」收縮壓。

(二)當顯著水準改為 α = 0.01 時，本題檢定結果的 p 值是否會改變？本研究的結論是否會改變？請解釋其原因。

A.設定顯著水準 α = 0.01，左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.01}{2},v=125+123-2} = -t_{0.005,246}$ = –2.5960；右側臨界值$t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.01}{2},v=125+123-2} = t_{0.005,246}$ = 2.5960(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1-\mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1-\mu_2 \neq 0$。

D.計算<u>檢定統計值</u>：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1-\mu_2 = 0$。

有規律運動組和無規律運動組滿意度分布變異數不相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} =$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(122.8-142.5)-(0)}{\sqrt{\frac{19.2^2}{125}+\frac{23.6^2}{123}}} = \frac{-19.7}{\sqrt{2.9491+4.5281}} = \frac{-19.7}{2.7345} = -7.2044$$

有規律運動組和無規律運動組滿意度分布變異數相等：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} =$

$$\frac{(122.8-142.5)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(125-1)\times 19.2^2+(123-1)\times 23.6^2}{125+123-2}\right)\times\left(\frac{1}{125}+\frac{1}{123}\right)}} = \frac{-19.7-0}{\sqrt{\left(\frac{113660.5}{246}\right)\times(0.00800+0.00813)}} = \frac{-19.7}{\sqrt{462.0345\times 0.01613}} = \frac{-19.7}{2.7300} = -7.2162$$

E.檢定統計值 t = -7.2044 ≤ 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$ = –2.5960 ≤ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2}$ = 2.5960；檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，故接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1-\mu_2 \neq 0$。因此，「有規律運動組」和「無規律運動組」收縮壓有顯著性差異，因「無規律運動組」收縮壓平均值 142.5 mmHg 比「有規律運動組」收縮壓平均值 122.8 mmHg 高，故推論「無規律運動組」收縮壓顯著性的高於「有規律運動組」收縮壓。改變檢測時得使用的顯著水準 α，會改變雙尾檢定時的左側臨界值和右側臨界值，因本題獲得的檢定統計值-7.2044 距離左側臨界值(-1.9697 或-2.5960)皆有些許距離，以檢定結果的 p 值或許有一點點的差異，但是對統計推論的結論不會改變。

10.3 兩個母體平均值之差的推論：配對樣本

配對樣本(matched samples)或成對樣本(paired samples)是以同一個(組)樣本元素的兩個觀察值。例如：研究夫妻體重的分布，夫妻為一組樣本(元素)，夫和妻分別之體重為一組中兩個配對的觀察值，即為配對樣本。研究每一個人減肥的成效，每一個人為一組樣本元素，一年前體重，與一年之後體重為一組中兩個配對的觀察值，亦即為配對樣本。

若兩個母體皆屬於配對組合分布型態，從此配對組合中，隨機抽選 n 組配對樣本，來自於母體 1 和 2 的樣本屬於配對樣本。原母體 1 和 2 的母體平均值分別為 μ_1 和 μ_2，母體配對組合的平均值差 μ_d：

$$\mu_d = \mu_1 - \mu_2$$

配對樣本組合觀測值樣本平均值之差$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$，為母體配對組合的平均值差($\mu_d$)的點估計值。

$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{1i}-\sum_{i=1}^{n} x_{2i}}{n} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$，其中 d_i是第 i 組配對樣本觀測值之差($d_i = x_{1i} - x_{2i}$)

配對樣本組合觀測值樣本平均值之差抽樣分布的期望值$\mu_{\bar{d}} = \mu_d$，即等於原始母體中配對觀測值之差抽樣分布的平均值。

配對樣本組合觀測值樣本平均值之差抽樣分布的變異數$\sigma_{\bar{d}}^2 = \frac{\sigma_d^2}{n}$，即等於原始母體中配對觀測值之差抽樣分布的變異數($\sigma_d^2 = \sigma_{\mu_1-\mu_2}^2$)除以配對抽樣樣本組數($n$)。唯，原始母體中配對觀測值之差抽樣分布的變異數($\sigma_d^2 = \sigma_{\mu_1-\mu_2}^2$)通常無法獲得，可以透過配對樣本組合觀測值之差抽樣分布的樣本變異數($S_d^2 = S_{\mu_1-\mu_2}^2$)當成母體中配對觀測值之差抽樣分布的變異數($\sigma_d^2 = \sigma_{\mu_1-\mu_2}^2$)的點估計值。

配對樣本組合觀測值之差抽樣分布的樣本變異數($S_d^2 = S_{\mu_1-\mu_2}^2$)和樣本標準(偏)差($S_d = S_{\mu_1-\mu_2}$)

樣本變異數 $S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_{1i}-x_{2i})-(\bar{x}_1-\bar{x}_2)]^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2-2\times d_i\times\bar{d}+\bar{d}^2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\sum_{i=1}^{n}(2\times d_i\times\bar{d})+\sum_{i=1}^{n}(\bar{d}^2)}{n-1} =$

$\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-2\times n\times\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i)}{n}\times\bar{d}+n\times\bar{d}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-2\times n\times\bar{d}\times\bar{d}+n\times\bar{d}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{n}\right)^2}{n-1} =$

$\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n^2}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})]^2}{n}}{n-1}$

樣本標準(偏)差 $S_d = \sqrt{S_d^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})]^2}{n}}{n-1}}$

10.3.1 配對母體平均值之差的區間估計

利用配對樣本平均值之差($\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$)推估配對組合母體平均值之差($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$)的信賴區間。可以分成四種狀況：樣本數量大母體變異數(σ_d^2)已知、樣本數量大母體變異數(σ_d^2)未知、樣本數量小母體變異數(σ_d^2)已知與樣本數量小母體變異數(σ_d^2)未知。

配對母體平均值之差的區間估計
- 樣本數量大
  - 母體變異數已知
  - 母體變異數未知
- 樣本數量小
  - 母體變異數已知
  - 母體變異數未知

分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本組合數量夠大(n > 30)，兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$)的抽樣分布會接近於常態分布。且兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)已知，兩個配對組合母體平均值之差($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1-\alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$\bar{d} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad \bar{d} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

其中$\sigma_{\bar{d}} = \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_{\mu_1-\mu_2}}{\sqrt{n}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。

$\sigma_d = \sigma_{\mu_1-\mu_2}$：兩配對母體觀測值平均值之差抽樣分布的標準(偏)差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

若兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)未知時，母體標準(偏)差由樣本標準(偏)差估計，兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$)抽樣分布的標準(偏)差 $\sigma_{\bar{d}}$的點估計值為$S_{\bar{d}}$

$$S_{\bar{d}} = S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})]^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$$

其中 $S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}$：配對母體觀測值之差抽樣分布的樣本標準(偏)差。

$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$：配對母體之配對樣本平均值之差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

$d_i = x_{1i} - x_{2i}$：第 i 組配對樣本觀測值之差。

分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本組合數量夠大(n > 30)，兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$)的抽樣分布會接近於常態分布。且兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)未知，兩個配對組合母體平均值之差($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times S_{\bar{d}} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S_d}{\sqrt{n}} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$$

其中 $S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}$：配對母體觀測值之差抽樣分布的樣本標準(偏)差。

$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$：配對母體之配對樣本平均值之差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

$d_i = x_{1i} - x_{2i}$：第 i 組配對樣本觀測值之差。

在兩個配對組合母體皆屬於常態分布，分別從配對組合母體隨機抽取樣本組合數量較少(n < 30)，兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$)的抽樣分布會接近於常態分布。且兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)已知，兩個配對組合母體平均值之差($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$\bar{d} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad \bar{d} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

其中$\sigma_{\bar{d}} = \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_{\mu_1-\mu_2}}{\sqrt{n}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的母體標準(偏)差。

$\sigma_d = \sigma_{\mu_1-\mu_2}$：兩配對母體觀測值平均值之差抽樣分布的標準(偏)差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

在兩個配對組合母體皆屬於常態分布，分別從母體隨機抽取樣本組合數量較少(n < 30)，兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$)的抽樣分布會接近於 t 分布。且兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)未知，兩個配對組合母體平均值之差($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$)在信賴係數 $1 - \alpha$ 的區間估計【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】為：

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad \bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times S_{\bar{d}} \qquad \bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times \frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} \qquad |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$$

$$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$$

其中$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$：從兩個配對組合母體中獲得的樣本平均值之差抽樣分布的樣本標準(偏)差，即是兩個配對組合母體中獲得的樣本平均值之差抽樣分布的母體標準(偏)差($\sigma_{\bar{d}}$)之估計值。

$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}$：兩個配對母體觀測值之差抽樣分布的樣本標準(偏)差。

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，其中自由度 $v = n-1$ 的 t 值。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

$\bar{d} = |\bar{x}_1-\bar{x}_2|$：從兩個配對組合母體中獲得樣本平均值之差。

表　　兩配對母體平均值之差的區間估計

樣本數量	母體變異數	信賴區間【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】
多 $n>30$	變異數(σ_d^2)已知	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$
多 $n>30$	變異數(σ_d^2)未知	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$
少 $n<30$	變異數(σ_d^2)已知	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$
少 $n<30$	變異數(σ_d^2)未知	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$

範例 10.7　欲比較奇遇連鎖餐廳，在特定地區六個加盟店在執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動前後每月平均營業額的差異，如下表所示。設個別加盟店月營業額的分布屬於常態分布。試估算粉紅佳人行銷活動前後營業額差異在信賴水準 0.95 的信賴區間？

題解：

加盟店 i	活動前月營業額 x_{2i}(萬元)	活動執行中月營業額 x_{1i}(萬元)	營業額差 $d_i = x_{1i}-x_{2i}$	d_i^2
1	56	75	19	361
2	66	82	16	256
3	55	77	22	484
4	70	83	13	169
5	42	56	14	196
6	55	60	5	25
合計			89	1491

樣本組合數量 $n=6$，從兩個配對組合母體中獲得樣本平均值之差$\bar{d} = |\bar{x}_1-\bar{x}_2| = \frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{89}{6} = 14.8333$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},6-1} = t_{0.025,5} = 2.5706$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}} \rightarrow 14.8333 \pm 2.5706 \times \frac{\sqrt{\frac{1491-\frac{89^2}{6}}{6-1}}}{\sqrt{6}} \rightarrow 14.8333 \pm 2.5706 \times \frac{\sqrt{\frac{1491-1320.1666}{5}}}{2.4495}$$

$$\rightarrow 14.8333 \pm 2.5706 \times \frac{5.8452}{2.4495} \rightarrow 14.8333 \pm 6.1342$$

因此，執行粉紅佳人行銷活動前後平均每月營業額的差異在信賴水準 0.95 的信賴區間為 8.6991~20.9675(萬元)。

練習 10.9 純純速食早餐店欲評估 R1 和 R2 兩種製作美味漢堡程序的時間。請旗下 7 位員工，分別以 R1 和 R2 兩種製作程序製備美味漢堡，其耗費時間如下表所示，假設製作漢堡時間的分布屬於常態分布。試估算兩種製作程序時間差異在信賴水準 0.95 的信賴區間？

題解：

員工 i	R1 程序時間 x_{2i}(秒)	R2 程序時間 x_{1i}(秒)	時間差 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$	d_i^2
1	56	63	7	49
2	66	78	12	144
3	55	77	22	484
4	70	69	-1	1
5	42	56	14	196
6	55	60	5	25
7	69	72	3	9
合計			62	908

樣本組合數量 $n = 7$，配對組合母體之配對樣本平均值之差$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{62}{7} =$ 8.8571，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},7-1} = t_{0.025,6} = 2.4469$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}} \rightarrow 8.8571 \pm 2.4469 \times \frac{\sqrt{\frac{908-\frac{62^2}{7}}{7-1}}}{\sqrt{7}} \rightarrow 8.8571 \pm 2.4469 \times \frac{\sqrt{\frac{908-549.1429}{6}}}{2.6458} \rightarrow 8.8571 \pm 2.4469 \times \frac{7.7337}{2.6458} \rightarrow 8.8571 \pm 7.1524$$

答案：兩種製作程序時間差異在信賴水準 0.95 的信賴區間為 1.70~16.01(秒)

練習 10.10 燕巢速食早餐店欲評估 R1 和 R2 兩種製作美味漢堡程序的時間。請旗下 8 位員工，分別以 R1 和 R2 兩種製作程序製備美味漢堡，其耗費時間如下表所示，假設製作漢堡時間的分布屬於常態分布。試估算兩種製作程序時間差異在信賴水準 0.95 的信賴區間？

員工 i	R1 程序時間 x_{2i}(秒)	R2 程序時間 x_{1i}(秒)
1	66	63
2	66	78
3	55	77
4	70	69
5	42	56
6	55	60
7	69	72
8	65	60

題解：

員工 i	R1 程序時間 x_{2i}(秒)	R2 程序時間 x_{1i}(秒)	時間差 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$	d_i^2
1	66	63	-3	49
2	66	78	12	144
3	55	77	22	484
4	70	69	-1	1
5	42	56	14	196
6	55	60	5	25
7	69	72	3	9
8	65	60	-5	25
合計			47	893

樣本組合數量 n = 8，配對組合母體之配對樣本平均值之差 $\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{47}{8} = 5.875$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},8-1} = t_{0.025,7} = 2.3646$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$|\bar{x}_1-\bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}} \rightarrow 5.875 \pm 2.3646 \times \frac{\sqrt{\frac{893-\frac{47^2}{8}}{8-1}}}{\sqrt{8}} \rightarrow 5.875 \pm 2.3646 \times \frac{\sqrt{\frac{893-276.125}{7}}}{2.8284} \rightarrow 5.875 \pm 2.3646 \times \frac{9.3875}{2.8284} \rightarrow 5.875 \pm 7.8481$$

答案：兩種製作程序時間差異在信賴水準 0.95 的信賴區間為-1.97~13.72(秒)

10.3.2 配對母體平均值之差的假設檢定

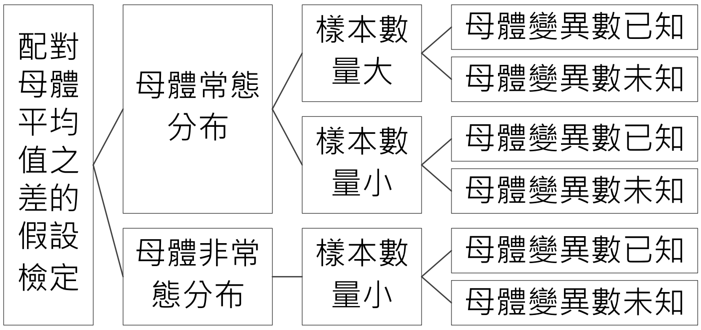
兩個配對組合母體平均值之差($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$)的假設檢定可分為三種型態

左尾檢定	雙尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0: $\mu_d \geq 0$	虛無假設 H_0: $\mu_d = 0$	虛無假設 H_0: $\mu_d \leq 0$
對立假設 H_1: $\mu_d < 0$	對立假設 H_1: $\mu_d \neq 0$	對立假設 H_1: $\mu_d > 0$

上述三種假設檢定型態，其兩個配對組合母體平均值之差($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$)在假設檢定時皆以 0 為基準值(預估值、驗證值、猜測值)，亦可以一常數 C 為基準值(預估值、驗證值、猜測值)。

在假設檢定的驗證過程中，將樣本平均值$\bar{x}$較高者設定為母體 1(公式)，樣本平均值$\bar{x}$較低者設定為母體 2。

配對組合母體平均值之差 μ_d的假設檢定可以分成六種狀況：母體常態分布樣本數量大母體變異數(σ_d^2)已知、母體常態分布樣本數量大母體變異數(σ_d^2)未知、母體常態分布樣本數量小母體變異數(σ_d^2)已知、母體常態分布樣本數量小母體變異數(σ_d^2)未知、母體非常態分布樣本數量小母體變異數(σ_d^2)已知與母體非常態分布樣本數量小母體變異數(σ_d^2)未知。



兩個配對組合母體皆屬於常態分布，分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本數量夠大(n > 30)，兩個母體樣本平均值之差($\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會接近於常態分布。當兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)已知時，檢定統計值為標準化 z 值

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}} = \frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{\sigma_{\mu_1-\mu_2}}{\sqrt{n}}}$$

其中$\sigma_{\bar{d}} = \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_{\mu_1-\mu_2}}{\sqrt{n}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。

$\sigma_d = \sigma_{\mu_1-\mu_2}$：兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$：兩個配對組合母體樣本平均值之差。

$\mu_d = \mu_1 - \mu_2$：兩個配對組合母體平均值之差。

兩個配對組合母體皆屬於常態分布，分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本組合數量夠大($n > 30$)，兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會接近於常態分布。當兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)未知時，檢定統計值為標準化 z 值。

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}}$$

其中$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$：從兩個配對組合母體獲得的樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差 $\sigma_{\bar{d}}$之點估計值。

$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}$：兩個配對組合母體樣本觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$：配對組合母體之配對樣本平均值之差。

$d_i = x_{1i} - x_{2i}$：第 i 組配對樣本觀測值之差。

兩個配對組合母體皆屬於常態分布，分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本組合數量較小($n < 30$)。當兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)已知時，檢定統計值為標準化 z 值。

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}} = \frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{\sigma_{\mu_1-\mu_2}}{\sqrt{n}}}$$

其中$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$：標準誤(差)(standard error)，即為兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差。

σ_d：兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$：配對組合母體之配對樣本平均值之差。

$\mu_d = \mu_1 - \mu_2$：兩個配對組合母體平均值之差。

兩個配對組合母體皆屬於常態分布，分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本組合數量較小($n < 30$)。當兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)未知時，檢定統計值為 t 值。

$$\text{檢定統計值 } t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}}$$

其中$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$：兩個配對組合母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差 $\sigma_{\bar{d}}$之點估計值。

$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})\right]^2}{n}}{n-1}}$：兩個配對組合母體樣本平均值之差抽樣分布的標準(偏)差。

n：從兩配對母體隨機抽取的配對樣本組合數量。

$\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$：配對組合母體之配對樣本平均值之差。

$d_i = x_{1i} - x_{2i}$：第 i 組配對樣本觀測值之差。

兩個配對組合母體皆屬於非常態分布，分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本組合數量較小(n < 30)。當兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)已知時，利用柴比氏定理(Chebyshev's theorem; Bienayme-Chebyshev's rule)進行假設檢定。當兩配對母體觀測值之差抽樣分布的標準(偏)差(σ_d)未知時，利用無母數統計法進行假設檢定。

表　兩配對母體平均值之差假設檢定

母體	樣本數量	母體變異數	檢定統計值
常態分布	多 $n > 30$	變異數(σ_d^2)已知	$z=\frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}$
常態分布	多 $n > 30$	變異數(σ_d^2)未知	$z=\frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}}$
常態分布	少 $n < 30$	變異數(σ_d^2)已知	$z=\frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}$
常態分布	少 $n < 30$	變異數(σ_d^2)未知	$t=\frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}}$
非常態分布	少 $n < 30$	變異數(σ_d^2)已知	柴比氏定理
非常態分布	少 $n < 30$	變異數(σ_d^2)未知	無母數統計法

在檢定階段，運用樣本統計值($\bar{d} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$配對組合母體之配對樣本平均值之差)獲得的檢定統計值─z 值或 t 值與在顯著水準 α 下的 z_α 或 t 值進行比較，以進行統計推論。

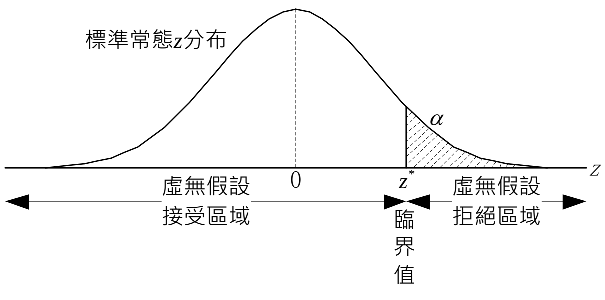
z 分布

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_d \leq 0$；對立假設 H_1: $\mu_d > 0$。

臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha$(正值)

若檢定統計值 $z \leq$ 臨界值 z_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z >$ 臨界值 z_α，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

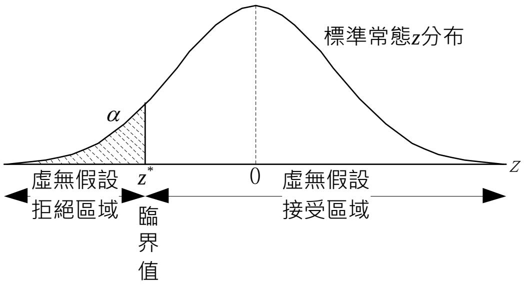


左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_d \geq 0$；對立假設 H_1: $\mu_d < 0$。

臨界值(Critical value) $z^* = -z_\alpha$(負值)

若檢定統計值 $z \geq$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

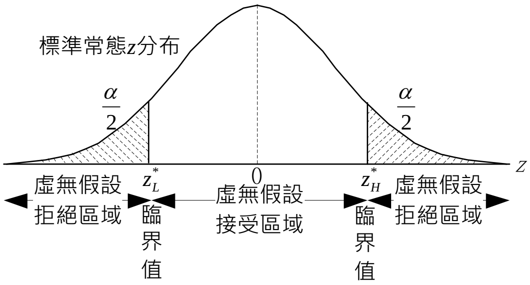


雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_d = 0$；對立假設 H_1: $\mu_d \neq 0$。

左側臨界值(Critical value)：$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}}$(負值)；右側臨界值：$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}}$(正值)。

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ 檢定統計值 $z \leq$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

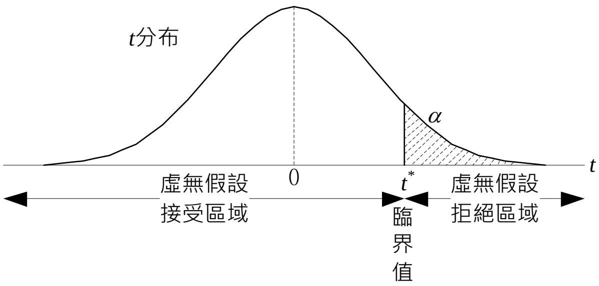


t 分布

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_d \leq 0$；對立假設 H_1: $\mu_d > 0$。

若檢定統計值 $t \leq$ 臨界值 $t_{\alpha,v=n-1}$(正值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

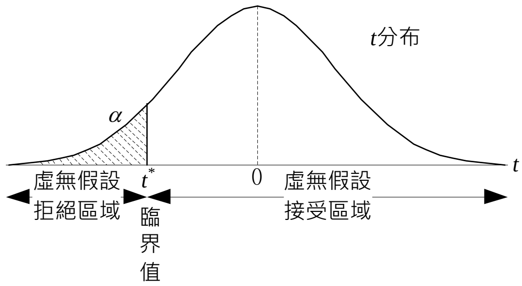
若檢定統計值 $t >$ 臨界值 $t_{\alpha,v=n-1}$(正值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_d \geq 0$；對立假設 H_1: $\mu_d < 0$。

若檢定統計值 $t \geq$ 臨界值$-t_{\alpha,v=n-1}$(負值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

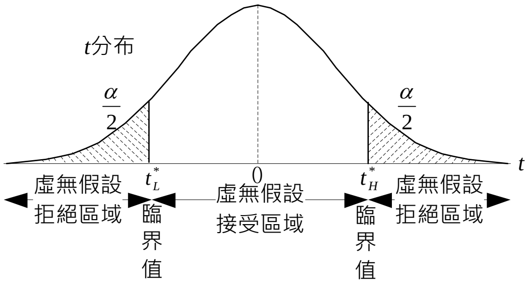
若檢定統計值 $t >$ 臨界值$-t_{\alpha,v=n-1}$(負值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu_d = 0$；對立假設 H_1: $\mu_d \neq 0$。

若左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(負值) ≤ 檢定統計值 t ≤ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(正值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 t < 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(負值)或檢定統計值 t > 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(正值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



範例 10.8 欲比較旗山連鎖餐廳，在特定地區 6 家加盟店同時執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動前後每月平均營業額的差異，設個別加盟店月營業額的分布屬於常態分布。如下表所示。試利用統計檢定粉紅佳人行銷活動前後營業額差異是否為 0？(即粉紅佳人行銷活動是否有效，信賴水準 0.95；顯著水準 $\alpha = 0.05$)

題解：

加盟店 i	活動前月營業額 x_{2i}(萬元)	活動執行中月營業額 x_{1i}(萬元)	營業額差 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$	d_i^2
1	56	75	19	361
2	66	82	16	256
3	55	77	22	484
4	70	83	13	169
5	42	56	14	196
6	55	60	5	25
合計	344	433	89	1491

樣本組合數量 $n = 6$，活動前營業額樣本平均值$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{1i}}{n} = \frac{344}{6} = 57.3333$ 萬元，活動中營業額樣本平均值$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{2i}}{n} = \frac{433}{6} = 72.1667$ 萬元，配對母體之配對樣本平均值之差$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{89}{6} = 14.8333$ 萬元。

假設原來兩個配對母體皆屬於常態分布。樣本數量 $n < 30$。母體變異數和標準(偏)差未知。需利用 t 值進行假設檢定。希望比較兩個配對母體平均值差是否為 0，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)$-t_{\frac{\alpha}{2},v} = -t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -t_{\frac{0.05}{2},6-1} = -t_{0.025,5} = -2.5706$；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},6-1} = t_{0.025,5} = 2.5706$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_d = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_d \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{14.8333-0}{\frac{\sqrt{\frac{1491-\frac{89^2}{6}}{6-1}}}{\sqrt{6}}} = \frac{14.8333}{\frac{\sqrt{\frac{1491-1320.1666}{5}}}{2.4495}} = \frac{14.8333}{\frac{5.8452}{2.4495}} = 6.2160$

E.檢定統計值 $t = 6.2160 >$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v} = 2.5706$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_d = 0$；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_d \neq 0$。因此，粉紅佳人行銷活動前後營業額有顯著性差異，兩者的差異不為 0。又因，$\bar{x}_1 = 57.3333$ 萬元 $< \bar{x}_2 = 72.1667$ 萬元，故執行粉紅佳人行銷活動後的營業額明顯比尚未執行粉紅佳人行銷活動高。

範例 10.9　欲比較如如連鎖餐廳，於特定地區 16 家加盟店同時執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動前後每月平均營業額的差異，設個別加盟店月營業額的分布屬於常態分布。如下表所示。試利用統計檢定粉紅佳人行銷活動前後營業額差異是否為 0？(即粉紅佳人行銷活動是否有效，信賴水準 0.95；顯著水準 $\alpha = 0.05$)

題解：

加盟店 i	活動前月營業額 x_{2i}(萬元)	活動執行中月營業額 x_{1i}(萬元)	營業額差 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$	d_i^2
1	56	65	9	81
2	66	72	6	36
3	55	62	7	49
4	70	79	9	81
5	65	68	3	9
6	50	52	2	4
7	55	58	3	9
8	62	68	6	36
9	55	59	4	16
10	52	56	4	16
11	55	60	5	25
12	55	59	4	16
13	58	62	4	16
14	55	58	3	9
15	65	65	0	0
16	35	34	-1	1
合計	909	977	68	404

樣本組合數量 $n = 16$，活動前營業額樣本平均值$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_{2i}}{n} = \frac{909}{16} = 56.8125$ 萬元，活動中營業額樣本平均值$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_{1i}}{n} = \frac{977}{16} = 61.0625$ 萬元，配對母體之配對樣本平均值之差$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{68}{16} =$ 4.2500 萬元。

假設原來兩個配對母體皆屬於常態分布。樣本數量 $n < 30$。母體變異數和標準(偏)差未知。需利用 t 值進行假設檢定。希望比較兩個配對母體平均值差是否為 0，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)：$-t_{\frac{\alpha}{2},v} = -t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -t_{\frac{0.05}{2},16-1} = -t_{0.025,15} = -2.1314$；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},16-1} = t_{0.025,15} = 2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_d = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_d \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{4.2500-0}{\frac{\sqrt{\frac{404-\frac{68^2}{16}}{16-1}}}{\sqrt{16}}} = \frac{4.2500}{\frac{\sqrt{\frac{404-289}{15}}}{4}} = \frac{4.2500}{\frac{2.7689}{4}} = 6.1397$

E.檢定統計值 $t = 6.1397$ > 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v} = 2.1314$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_d = 0$；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_d \neq 0$。因此，粉紅佳人行銷活動前後營業額有顯著性差異，兩者的差異不為 0。又因，$\bar{x}_1 = 56.8125$ 萬元 < $\bar{x}_2 = 61.0625$ 萬元，故執行粉紅佳人行銷活動後的營業額明顯比尚未執行粉紅佳人行銷活動高。

練習 10.11 純純速食店欲評估父母對 A 和 B 兩種兒童餐的看法，選擇 10 對父母，其中 5 對評估 A 兒童餐；5 對評估 B 兒童餐，分別評估父親和母親對該兒童餐的購買意願，1 表示很低購買意願，10 表示很高購買意願。資料如下表所示。試評估父親和母親的購買意願是否有顯著性差異，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定。

樣本編號 i	兒童餐	父親購買意願 x_{1i}	母親購買意願 x_{2i}
1	A	8	6
2	A	8	5
3	A	9	8
4	A	4	5
5	A	7	5
6	B	2	5
7	B	5	2
8	B	7	3
9	B	5	2
10	B	4	4

題解：父親樣本數量 $n_f = 10$ 屬於樣本數量較少者，平均值$\bar{x}_f = 5.9$，標準(偏)差 $S_f = 2.2336$。母親樣本數量 $n_m = 10$ 屬於樣本數量較少者，平均值$\bar{x}_m = 4.5$，標準(偏)差 $S_m = 1.8409$。

樣本編號 i	兒童餐	父親購買意願 x_{1i}	母親購買意願 x_{2i}	d_i	d_i^2
1	A	8	6	2	4
2	A	8	5	3	9
3	A	9	8	1	1
4	A	4	5	-1	1
5	A	7	5	2	4
6	B	2	5	-3	9
7	B	5	2	3	9
8	B	7	3	4	16
9	B	5	2	3	9
10	B	4	4	0	0
合計		59	45	14	62

樣本數量 $n = 10$，配對樣本平均值之差$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{62}{10} = 6.2$

假設原來兩個配對母體皆屬於常態分布。樣本數量 $n < 30$。母體變異數和標準(偏)差未知。需利用 t 值進行假設檢定。希望比較兩個配對母體平均值差是否為 0，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v} = -t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -t_{\frac{0.05}{2},10-1} = -t_{0.025,9} = -2.2622$；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},10-1} = t_{0.025,9} = 2.2622$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_d = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_d \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{6.2-0}{\frac{\sqrt{\frac{62-\frac{14^2}{10}}{10-1}}}{\sqrt{10}}} = \frac{6.2}{\frac{\sqrt{\frac{62-19.6}{9}}}{3.1623}} = \frac{6.2}{\frac{2.1705}{3.1623}} = 9.0330$

E.檢定統計值 $t = 9.0330$ > 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v} = 2.2622$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis)H_0: $\mu_d = 0$；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_d \neq 0$。因此，父親和母親的購買意願有顯著性差異，兩者的差異不為 0。又因，父親樣本平均值$\bar{x}_f = 5.9$ > 母親樣本平均值$\bar{x}_m = 4.5$，父親的購買意願比母親顯著性地較高。

練習 10.12 欲調查餐飲衛生教育對消費者飲食行為的影響，隨機抽取 10 位外食消費者觀看餐飲衛生教育宣導影片，結果發現觀看影片前後，該消費者每週前往不衛生餐廳用餐的次數，如下表所示。若前往不衛生餐廳用餐的次數趨近於常態分布。以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定，觀看餐飲衛生教育宣導影片是否較未觀看影片前到不衛生餐廳用餐的次數有顯著性的減少？

樣本編號 i	觀看前 x_{1i}	觀看後 x_{2i}
1	12	8
2	13	8
3	9	9
4	8	4
5	12	7
6	12	2
7	13	5
8	8	7
9	9	5
10	7	4

題解：

樣本編號 i	觀看前 x_{1i}	觀看後 x_{2i}	$d_i = x_{1i} - x_{2i}$	d_i^2
1	12	8	4	16
2	13	8	5	25
3	9	9	0	0
4	8	4	4	16
5	12	7	5	25
6	12	2	10	100
7	13	5	8	64
8	8	7	1	1
9	9	5	4	16
10	7	4	3	9
合計			44	272

樣本數量 $n = 10$，配對樣本平均值之差$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})}{n} = \frac{44}{10} = 4.4$

假設原來兩個配對母體皆屬於常態分布。樣本數量 $n < 30$。母體變異數和標準(偏)差未知。需利用 t 值進行假設檢定。觀看餐飲衛生教育宣導影片是否較未觀看影片前到不衛生餐廳用餐的次數有顯著性的減少，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $t_{\alpha,v} = t_{\alpha,n\text{-}1} = t_{0.05,10\text{-}1} = t_{0.05,9} = 1.8331$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 \leq 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 > 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{s_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{4.4-0}{\frac{\sqrt{\frac{272-\frac{44^2}{10}}{10-1}}}{\sqrt{10}}} = \frac{4.4-0}{\frac{\sqrt{\frac{272-193.6}{9}}}{3.1623}} = \frac{4.4-0}{\frac{2.9515}{3.1623}} = 4.7143$

E.檢定統計值 $t = 4.7143$ > 臨界值 $t_{\alpha,v} = 1.8331$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 - \mu_2 \le 0$；接受對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$。因此，觀看餐飲衛生教育宣導影片後前到不衛生餐廳用餐的次數有顯著性的減少。

10.4 兩個母體比例之差的推論

兩個母體比例之差($p_1 - p_2$)，其點估計值(Point estimate)為從兩個獨立母體隨機抽樣獲得樣本比率之差($\bar{p}_1 - \bar{p}_2$)。

樣本比率之差($\bar{p}_1 - \bar{p}_2$)的抽樣分布

期望值(Expected value) $E(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = p_1 - p_2$

變異數(Variance) $\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \frac{p_1\times q_1}{n_1} + \frac{p_2\times q_2}{n_2} = \frac{p_1\times(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2\times(1-p_2)}{n_2}$

標準(偏)差 $\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \sqrt{\frac{p_1\times q_1}{n_1} + \frac{p_2\times q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{p_1\times(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2\times(1-p_2)}{n_2}}$

其中 n_1：從母體 1 隨機抽取的樣本數量

n_2：從母體 2 隨機抽取的樣本數量

在樣本數量較多的情況($n_1 \times p_1 > 5$ 及 $n_1 \times q_1 > 5$ 和 $n_2 \times p_2 > 5$ 及 $n_2 \times q_2 > 5$)下，樣本比例之差($\bar{p}_1 - \bar{p}_2$)的抽樣分布接近於常態分布$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \sim N(p_1 - p_2, \frac{p_1\times q_1}{n_1} + \frac{p_2\times q_2}{n_2})$。

10.4.1 母體比例之差的區間估計

利用樣本比例之差($\bar{p}_1 - \bar{p}_2$)推估母體比例之差($p_1 - p_2$)的信賴區間。信賴區間數值若包含 0，代表兩個母體比例沒有達到顯著性的差異水準。

在樣本數量較多的情況($n_1\times p_1 > 5$ 及 $n_1\times q_1 > 5$ 和 $n_2\times p_2 > 5$ 及 $n_2\times q_2 > 5$)下，若母體比例 p_1 和 p_2 未知時，利用$\bar{p}_1$推估 p_1，以$\bar{p}_2$推估 p_2。在進行信賴區間估計時，一般會將樣本比率較高者，假設為母體 1；樣本比率較低者，假設為母體 2。在信賴係數 $1-\alpha$，信賴區間為

$$|\bar{p}_1 - \bar{p}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} \rightarrow |\bar{p}_1 - \bar{p}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} \rightarrow |\bar{p}_1 - \bar{p}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

其中$\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1\times q_1}{n_1} + \frac{p_2\times q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{p_1\times(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2\times(1-p_2)}{n_2}}$，標準誤(差)(standard error)。$\bar{p}_1 - \bar{p}_2$抽樣分布的標準(偏)差之點估計值為$S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$

n_1：從母體 1 隨機抽取的樣本數量

n_2：從母體 2 隨機抽取的樣本數量

在樣本數量較多的情況($n_1 \times p_1 > 5$ 及 $n_1 \times q_1 > 5$ 和 $n_2 \times p_2 > 5$ 及 $n_2 \times q_2 > 5$)下，若母體比例 p_1 和 p_2 未知時，亦可利用 0.5 推估 p_1，以 0.5 推估 p_2。為此估算的信賴區間比較大，當然可以視為一種比較保守的信賴區間估計法。

$$|\bar{p}_1 - \bar{p}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{n_1} + \frac{0.5\times(1-0.5)}{n_2}}$$

範例 10.10 為調查高雄市男女性消費者對有機飲食的支持比例的差異，希望在信賴水準估計 95 %，從高雄市消費者中抽取 $n_1 = 310$ 位男性消費者和 $n_2 = 305$ 位女性消費者為樣本，統計其對有機飲食的支持比例分別為$\bar{p}_1 = 0.56$ 和$\bar{p}_2 = 0.52$，請計算高雄市男女性消費者對有機飲食支持比率之差的信賴區間？

題解：男性消費者樣本數 $n_1 = 310$，男性有機飲食支持樣本比例$\bar{p}_1 = 0.56$，女性消費者樣本數 $n_2 = 305$，女性有機飲食支持樣本比例$\bar{p}_2 = 0.52$，信賴水準 $1-\alpha = 0.95$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

95 %信賴區間公式為$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$

$$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} \le p_1-p_2 \le |\bar{p}_1-\bar{p}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

下限：$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} = |0.56-0.52| - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.56\times(1-0.56)}{310}+\frac{0.52\times(1-0.52)}{305}} = 0.04 - 1.96 \times 0.0402 = 0.04 - 0.0787 = -0.0387$

上限：$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} = |0.56-0.52| + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.56\times(1-0.56)}{310}+\frac{0.52\times(1-0.52)}{305}} = 0.04 + 1.96 \times 0.0402 = 0.04 + 0.0787 = 0.1187$

故男女性消費者支持有機飲食比率之差(p_1-p_2)之 95 %信賴區間(CI)為$-0.0387 \le p_1-p_2 \le 0.1187$。

練習 10.13 在咖啡飲料市場中，為了解男女性消費者對現煮咖啡的偏好比例之差異，希望在信賴水準估計 95 %，從咖啡飲料的消費者中抽取 $n_1 = 253$ 位男性消費者和 $n_2 = 198$ 位女性消費者為樣本，統計其對現煮咖啡的偏好比例分別為$\bar{p}_1 = 0.65$ 和$\bar{p}_2 = 0.58$，請計算男女性消費者對現煮咖啡偏好比率之差的信賴區間？

題解：男性消費者樣本數 $n_1 = 253$，男性對現煮咖啡偏好樣本比例$\bar{p}_1 = 0.65$，女性消費者樣本數 $n_2 = 198$，女性對現煮咖啡偏好樣本比例$\bar{p}_2 = 0.58$，信賴水準 $1-\alpha = 0.95$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

95 %信賴區間公式為$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$

$$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} \le p_1-p_2 \le |\bar{p}_1-\bar{p}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

下限：$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} = |0.65-0.58| - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.65\times(1-0.65)}{253}+\frac{0.58\times(1-0.58)}{198}} = 0.07 - 1.96 \times 0.0461 = 0.07 - 0.0904 = -0.0205$

上限：$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} = |0.65-0.58| + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.65\times(1-0.65)}{253}+\frac{0.58\times(1-0.58)}{198}} = 0.07 + 1.96 \times 0.0461 = 0.07 + 0.0904 = 0.1604$

答案：故男女性消費者對現煮咖啡偏好比率之差的信賴區間(CI)為$-0.0205 \le p_1-p_2 \le 0.1604$

練習 10.14 在咖啡飲料市場中，為了解男女性消費者對拿鐵咖啡(Caffè Latte)的偏好比例之差異，希望在信賴水準估計 95 %，從咖啡飲料的消費者中抽取 $n_1 = 250$ 位男性消費者和 $n_2 = 220$ 位女性消費者為樣本，統計其對拿鐵咖啡的偏好比例分別為$\bar{p}_1 = 0.66$ 和$\bar{p}_2 = 0.50$，請計算男女性消費者對拿鐵咖啡偏好比率之差的信賴區間？

題解：男性消費者樣本數 $n_1 = 250$，男性對現煮咖啡偏好樣本比例$\bar{p}_1 = 0.66$，女性消費者樣本數 $n_2 = 220$，女性對拿鐵咖啡偏好樣本比例$\bar{p}_2 = 0.50$，信賴水準 $1-\alpha = 0.95$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

95 %信賴區間公式為$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$

$$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} \le p_1-p_2 \le |\bar{p}_1-\bar{p}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

下限：$|\bar{p}_1-\bar{p}_2| - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} = |0.66-0.50| - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.66\times(1-0.66)}{250}+\frac{0.50\times(1-0.50)}{220}} = 0.16 - 1.96 \times 0.0449 = 0.16 - 0.0880 = 0.0720$

上限：$|\bar{p}_1 - \bar{p}_2| + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}} = |0.66 - 0.50| + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.66\times(1-0.66)}{250} + \frac{0.50\times(1-0.50)}{220}} = 0.16 + 1.96 \times 0.0449 = 0.16 + 0.0880 = 0.2480$

答案：故男女性消費者對拿鐵咖啡偏好比率之差的信賴區間(CI)為 $0.0720 \le p_1 - p_2 \le 0.2480$

10.4.2 母體比率之差的假設檢定

利用樣本比例之差($\bar{p}_1 - \bar{p}_2$)進行母體比率之差($p_1 - p_2$)的假設檢定。

在樣本數量較多的情況($n_1 \times p_1 > 5$ 及 $n_1 \times q_1 > 5$ 和 $n_2 \times p_2 > 5$ 及 $n_2 \times q_2 > 5$)下，因此，可以利用標準化 z 值進行假設檢定。在進行假設檢定時，一般會將樣本比率較高者，假設為母體 1；樣本比率較低者，假設為母體 2。

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}}$$

其中$S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$

n_1: 從母體 1 隨機抽取的樣本數量

n_2: 從母體 2 隨機抽取的樣本數量

虛無假設若有包含 H_0: $p_1 - p_2 = 0$ ($p_1 = p_2$)時，可以運用混合(共同)樣本比例(common sample proportion) $\bar{p} = \frac{n_1\times\bar{p}_1+n_2\times\bar{p}_2}{n_1+n_2}$推估母體比例 p 較為準確。

樣本比例之差的標準(偏)差$S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$

$$S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\bar{p}\times(1-\bar{p})\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{\frac{n_1\times\bar{p}_1+n_2\times\bar{p}_2}{n_1+n_2}\times\left(1-\frac{n_1\times\bar{p}_1+n_2\times\bar{p}_2}{n_1+n_2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

母體比率之差($p_1 - p_2$)假設檢定之統計檢定值 z

$$z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\bar{p}\times(1-\bar{p})\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{n_1\times\bar{p}_1+n_2\times\bar{p}_2}{n_1+n_2}\times\left(1-\frac{n_1\times\bar{p}_1+n_2\times\bar{p}_2}{n_1+n_2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

在檢定階段，運用樣本統計值(樣本比例之差$\bar{p}_1 - \bar{p}_2$)標準化後之檢定統計值─z 值與在顯著水準 α 下的臨界值─z_α或$z_{\frac{\alpha}{2}}$值進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $p_1 - p_2 \le 0$；對立假設 H_1: $p_1 - p_2 > 0$。

臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha$

若檢定統計值 $z \le$ 臨界值 z_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z >$ 臨界值 z_α，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $p_1 - p_2 \ge 0$；對立假設 H_1: $p_1 - p_2 < 0$。

臨界值(Critical value) $z^* = -z_\alpha$

若檢定統計值 $z \ge$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $p_1 - p_2 = 0$；對立假設 H_1: $p_1 - p_2 \ne 0$。

左側臨界值(Critical value) $z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}}$；右側臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}}$

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} \le$ 檢定統計值 $z \le$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 10.11 為調查高雄市男女性消費者對有機飲食的支持比例的差異，希望在信賴水準估計 95 %，從高雄市消費者中抽取 $n_1 = 310$ 位男性消費者和 $n_2 = 305$ 位女性消費者為樣本，統計其對有機飲食的支持比例分別為$\bar{p}_1 = 0.56$ 和$\bar{p}_2 = 0.52$，請計算高雄市男女性消費者對有機飲食支持比率是否相等？

題解：男性消費者數量 $n_1 = 310$，男性支持有機飲食樣本比例$\bar{p}_1 = 0.56$，女性消費者數量 $n_2 = 305$，女性支持有機飲食樣本比例$\bar{p}_2 = 0.52$，信賴水準 $1 - \alpha = 0.95$，顯著水準 $\alpha = 0.05$。希望比較男和女性消費者對於有機飲食支持比率是否相同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，右側臨界值(Critical value)：$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -1.9600$；左側臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = 1.9600$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_1 - p_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_1 - p_2 \ne 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $p_1 - p_2 = 0$。

原始公式運算檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.56-0.52)-(0)}{\sqrt{\frac{0.56\times(1-0.56)}{310}+\frac{0.52\times(1-0.52)}{305}}} = \frac{0.04}{0.0402} = 0.9959$

較精準運算檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\bar{p}\times(1-\bar{p})\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{n_1\times\bar{p}_1+n_2\times\bar{p}_2}{n_1+n_2}\times\left(1-\frac{n_1\times\bar{p}_1+n_2\times\bar{p}_2}{n_1+n_2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0.56-0.52)-(0)}{\sqrt{\frac{310\times0.56+305\times0.52}{310+305}\times\left(1-\frac{310\times0.56+305\times0.52}{310+305}\right)\times\left(\frac{1}{310}+\frac{1}{305}\right)}} = \frac{0.04}{0.0402} = 0.9952$

E.左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.9600 \le$ 檢定統計值 $z = 0.9952 \le$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9600$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_1 - p_2 = 0$。因此，推估男和女性消費者對於有機飲食支持比率相同，未達顯著性差異。

練習 10.15 連鎖速食餐廳宣稱『點用冰淇淋消費者中女性比率高於男性至少 0.15』，現今隨機抽取 249 位女性消費者，其中有點用冰淇淋者有 92 位；隨機抽取 202 位男性消費者，其中有點用冰淇淋者有 45 位，請嘗試分別以 $\alpha = 0.05$ 和 $\alpha = 0.01$ 驗證連鎖速食餐廳宣稱『點用冰淇淋消費者中女性比率高於男性至少 0.15』是否為真？

題解：女性樣本數 $n_1 = 249$，女性點用冰淇淋樣本比例$\bar{p}_1 = \frac{92}{249} = 0.3695$，男性樣本數 $n_2 = 202$，男性點用冰淇淋樣本比例$\bar{p}_2 = \frac{45}{202} = 0.2228$。希望驗證『點用冰淇淋消費者中女性比率高於男性至少 0.15』，原先陳述的狀態(至少 0.15)即為虛無假設的條件，未達原先宣稱的狀態(未達 0.15)即為對立假設的條件，故本範例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值(Critical value): $-z_\alpha = -z_{0.05} = -1.6450$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_1 - p_2 \ge 0.15$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_1 - p_2 < 0.15$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $p_1 - p_2 = 0.15$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.3695-0.2228)-(0.15)}{\sqrt{\frac{0.3695\times(1-0.3695)}{249}+\frac{0.2228\times(1-0.2228)}{202}}} = \frac{-0.00329}{0.042341} = -0.0778$

E.檢定統計值 $z = -0.0778 > $ 臨界值 $-z_{0.05} = -1.6450$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_1 - p_2 \geq 0.15$。因此，『點用冰淇淋消費者中女性比率高於男性至少 0.15』成立。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.01$，臨界值(Critical value): $-z_\alpha = -z_{0.01} = -2.3267$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_1 - p_2 \geq 0.15$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_1 - p_2 < 0.15$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $p_1 - p_2 = 0.15$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.3695-0.2228)-(0.15)}{\sqrt{\frac{0.3695\times(1-0.3695)}{249}+\frac{0.2228\times(1-0.2228)}{202}}} = \frac{-0.00329}{0.042341} = -0.0778$

E.檢定統計值 $z = -0.0778 > $ 臨界值 $-z_{0.01} = -2.3267$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_1 - p_2 \geq 0.15$。因此，『點用冰淇淋消費者中女性比率高於男性至少 0.15』可以成立，屬於真實的敘述。

練習 10.16 連鎖速食餐廳在 A 和 B 兩家分店設立購餐車道，方便汽車族和機車族點購餐點。在前往 A 分店的消費者中，隨機抽取 100 名消費者，其中有 21 位消費者此次使用購餐車道服務；前往 B 分店的消費者中，隨機抽取 120 名消費者，其中有 23 位消費者此次使用購餐車道服務。請嘗試分別以 $\alpha = 0.05$ 和 $\alpha = 0.01$ 驗證連鎖速食餐廳 A 和 B 兩家分店消費者使用購餐車道的比率是否有顯著性的差異？

練習 10.17 連鎖速食餐廳有 A 和 B 兩家肉品供應商，今隨機抽查其所供應肉品之抗生素殘留量，A 供應商隨機抽選 120 件，其中 9 件抗生素殘留量過高；B 供應商隨機抽選 115 件，其中 5 件抗生素殘留量過高，假設在 5 %顯著水準下，是否可以確認「A 供應商肉品抗生素殘留量高於 B 供應商超過 3 %」？

題解：A 供應商樣本數 $n_A = 120$，A 供應商抗生素殘留量過高樣本比例 $\bar{p}_A = \frac{9}{120} = 0.0750$(母體 1)，B 供應商樣本數 $n_B = 115$，B 供應商抗生素殘留量過高樣本比例 $\bar{p}_B = \frac{5}{115} = 0.0435$(母體 2)。希望驗證『A 供應商肉品抗生素殘留量高於 B 供應商是否超過 3 %』以達到採購區別選擇的目的，沒有超過 3 %可以視為無法明確區別採購廠商的狀況，將其歸屬於虛無假設，有超過 3 %時可以視為明確區別廠商的狀況，將其歸屬於對立假設，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $z_\alpha = z_{0.05} = 1.6450$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_A - p_B \leq 0.03$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_A - p_B > 0.03$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $p_1 - p_2 = 0.03$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.0750-0.0435)-(0.03)}{\sqrt{\frac{0.0750\times(1-0.0750)}{120}+\frac{0.0435\times(1-0.0435)}{115}}} = \frac{0.001522}{0.030655} = 0.0496$

E.檢定統計值 $z = 0.0496 < $ 臨界值 $z_{0.05} = 1.6450$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_A - p_B \le 0.03$。因此，『A 供應商肉品抗生素殘留量沒有明顯高於 B 供應商 3%』。

練習 10.18 連鎖速食餐廳有一部咖啡機，分別由大卷和大 D 兩位美女員工輪流製作咖啡飲品，經抽驗其不良品記錄，大卷樣本數 135 杯，不良品數 32 杯；大 D 樣本數 210 杯，不良品數 25 杯，假設在 5 %顯著水準下，檢定大卷和大 D 兩位美女員工的製作水準是否有顯著性差異？

題解：大卷樣本數 $n_{卷} = 135$，大卷不良率$\bar{p}_{卷} = \frac{32}{135} = 0.2370$；大 D 樣本數 $n_D = 210$，大 D 不良率$\bar{p}_D = \frac{25}{210} = 0.1190$。希望驗證『大卷和大 D 兩位美女員工的製作水準是否有顯著性差異』以達到區別選擇的目的，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -1.9600$；右側臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = 1.9600$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_{卷} = p_D$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_{卷} \ne p_D$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $p_{卷} - p_D = 0.00$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.2370-0.1190)-(0.00)}{\sqrt{\frac{0.2370\times(1-0.2370)}{135}+\frac{0.1190\times(1-0.1190)}{210}}} = \frac{0.117989}{0.042884} = 2.7514$

E.檢定統計值 $z = 2.7514 >$ 右側臨界值 $z_{0.025} = 1.96$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_{卷} - p_D = 0$；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_{卷} \ne p_D$。因此，『大卷和大 D 兩位美女員工的製作水準有顯著性差異，大卷不良率比大 D 高』。

練習 10.19 24 小時連鎖速食餐廳有一部咖啡機，分別由小 D(早班)、中 D(晚班)和大 D(夜班)三位美女員工 24 小時輪流製作咖啡飲品，經隨機抽驗品質記錄，小 D 良品數 135 杯，不良品數 32 杯；中 D 良品數 210 杯，不良品數 25 杯；大 D 良品數 310 杯，不良品數 45 杯，假設在 5 %顯著水準下，檢定小 D(早班)的不良率是否較大 D(夜班)為高；小 D(早班)的不良率是否較非小 D(晚班和夜班)者為高？

題解：小 D 樣本數 $n_{小} = 167$，小 D 不良品樣本比例$\bar{p}_{小} = \frac{32}{167} = 0.1916$；中 D 樣本數 $n_{中} = 235$，中 D 不良品樣本比例$\bar{p}_{中} = \frac{25}{235} = 0.1064$；大 D 樣本數 $n_{大} = 355$，大 D 不良品樣本比例 $\bar{p}_{大} = \frac{45}{355} = 0.1267$。希望驗證『小 D(早班)的不良率是否較大 D(夜班)為高』以達到區別選擇的目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $z_\alpha = z_{0.05} = 1.6450$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_{小} - p_{大} \le 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_{小} - p_{大} > 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $p_{小} - p_{大} \le 0$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.1916-0.1267)-(0.00)}{\sqrt{\frac{0.1916\times(1-0.1916)}{167}+\frac{0.1267\times(1-0.1267)}{355}}} = \frac{0.064856}{0.035204} = 1.8423$

E.檢定統計值 $z = 1.8423 >$ 臨界值 $z_{0.05} = 1.645$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_{小} - p_{大} \le 0$；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_{小} - p_{大} > 0$。因此，『小 D(早班)的不良率有顯著性的比大 D(夜班)為高』。

小 D 樣本數 $n_{小} = 167$，小 D 不良率$\bar{p}_{小} = \frac{32}{167} = 0.1916$；非小 D 樣本數 $n_{非} = 590$，非小 D 不良率$\bar{p}_{非} = \frac{70}{590} = 0.1186$。

希望驗證『小 D(早班)的不良率是否較非小 D(晚班和夜班)為高』以達到區別選擇的目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test) 。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $z_{\alpha} = z_{0.05} = 1.6450$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_{小} - p_{非} \le 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_{小} - p_{非} > 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $p_{小} - p_{非} \le 0$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times\bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\times(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\times(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0.1916-0.1186)-(0.00)}{\sqrt{\frac{0.1916\times(1-0.1916)}{167}+\frac{0.1186\times(1-0.1186)}{590}}} = \frac{0.072973}{0.033238} = 2.1954$

E.檢定統計值 $z = 2.1954$ > 臨界值 $z_{0.05} = 1.645$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $p_{小} - p_{非} \le 0$；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p_{小} - p_{非} > 0$。因此，『小 D(早班)的不良率有顯著性的比非小 D(晚班和夜班)為高』。

10.5 統計應用實例 【選擇教材】

不同性別的遊客，其遊憩體驗、旅遊滿意度、遊憩動機、重遊意願是否有顯著的差異？

分析方法

自變數(自變項)為遊客的性別，屬於類別變項(nominal variable)，有兩個『水準』(level)：男生、女生，因變數(依變項)為連續變項，每個因變數分開考驗，可採用獨立樣本的 t-test

自變數為二分變項　　因變數

A1
A2　⇨　一個連續變項

上述 A1、A2 二個組別是個別獨立，彼此不受影響，使用獨立樣本(independent sample) t-test，其目的在考驗二個獨立母群體平均數的差異情況

單一組別　　連續變數

受測者　前測 Y1 ⇕ 後測 Y2　相依樣本 t-test

相依樣本(dependent sample)t-test，在相依樣本中，受測者是同一組受測者，即為重複量數設計法。實驗設計中之『配對組』法，也適用於相依樣本 t-test

統計分析方法：獨立樣本的 t-test

獨立樣本 t-test 基本假設

1.常態化(nomality)：樣本來自兩個母群體，分別呈現常態分布。當兩組人數增加，樣本平均數差異的抽樣分布趨近於常態分布。

2.變異數同質性(homogeneity of variance)：兩個母群體的變異數相等，即$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$。

3.獨立性(independent)：每個樣本觀察值是獨立，彼此之間沒有任何關聯。

t-test 分析中，若同時常態性與變異數同質性無法符合條件，即使樣本數很大，結果正確率也會很低，此時需改用無母數統計法。

t-test 之虛無假設與對立假設：

$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

獨立樣本兩組受測者均為獨立個體，兩組的反應不相互影響，在實驗設計中又稱為「受測者間設計」(between-subjects design)，或完全隨機化設計；若兩組受測者不獨立，而只是一組受測者，採重複評量(repeated measure)設計方法，讓同一組受測者重複接受不同的實驗處理，然後讓同一組受測者接受實驗處理之前後測，因為是同一組受測者，在不同處理的反應中會有某種程度的關聯，此種樣本設計為相依樣本，相依樣本又稱為受測者內設計或隨機化區組設計(randomized block design)。如果是採用配對組法(subject matching)，雖然兩組受測者不是同樣的人，但因其在某個特質上完全相同，因而可視為有關聯的兩組受測者，亦屬於相依樣本。

相依/配對樣本 t 檢定分析 SPSS 操作方法

1. Analyze/Statistics(統計分析) → Compare Means(比較平均數法) → Paired-Samples T Test…(成對樣本 T 檢定…)，打開 Paired-Samples T Test (成對樣本 T 檢定…)對話視窗
2. 在左邊對話方塊中與進行 Paired-samples t test 的變數配對，依序點選配對，進入右邊的 Paired Variables(成對變數)對話方塊中
3. 點選 OK 按鈕，即可執行 Paired-samples t test
4. 即可獲得下列表格結果

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference: Lower	Upper			
Pair 1	期望值-滿意度	-.73	1.50	.21	-1.15	-.30	-3.459	50	.001
Pair 2	身高-體重	102.20	8.47	2.19	97.51	106.89	46.731	14	.000

5. 表格相關項目說明
   a.Mean：平均值
   b.Std. Deviation：標準差/標準(偏)差
   c.t：t Test 之 t 值
   d.df：自由度
   e.Sig.(2-tailed)：雙尾檢定之機率(P 值)

獨立樣本 t 檢定分析 SPSS 操作方法

1. Analyze/Statistics(統計分析) → Compare Means(比較平均數法) → Independent-Samples T Test…(獨立樣本 T 檢定…)，打開 Independent-Samples T Test (獨立樣本 T 檢定…)對話視窗
2. 在左邊的對話方塊中的變數(變項)，若是因變數(依變數、檢定變數)者，勾選進入右邊的 Test Variable(s): (檢定變數)對話方塊
3. 在左邊的對話方塊中的變數(變項)，若是自變數(二分自變項、分組變項)者，勾選進入右下方的 Grouping Variable(s): (分組變項)對話方塊。如性別變項。

4.按右下方的 Define Groups…(定義組別鈕)，出現 Define Groups 次對話視窗

5.在 Group 1: (組別 1)後面的空格內輸入數值 1

6.在 Group 2: (組別 2)後面的空格內輸入數值 2

7.按 Continue 鈕(繼續鈕)，回到 Independent-Samples T Test (獨立樣本 T 檢定…)對話視窗

8.按 OK 鈕，以執行 Independent-Samples T Test 程序

Group Statistics

	sex	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
身高	男	9	169.22	10.17	3.39
	女	6	174.50	11.90	4.86
體重	男	9	66.78	10.35	3.45
	女	6	72.67	7.06	2.88

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper
身高	Equal variances assumed	.063	.806	-.922	13	.374	-5.28	5.73	-17.65	7.09
	Equal variances not assumed			-.891	9.632	.395	-5.28	5.92	-18.54	7.99
體重	Equal variances assumed	1.493	.243	-1.211	13	.247	-5.89	4.86	-16.40	4.62
	Equal variances not assumed			-1.310	12.962	.213	-5.89	4.50	-15.61	3.83

9.表格相關項目說明

a.在 Group Statistics 表格內 N：各組(男、女組)的實際分析人數(實際樣本數)

b.在 Group Statistics 表格內 Mean：各組(男、女組)的算術平均值

c.在 Group Statistics 表格內 Std. Deviation：各組(男、女組)的標準差/標準(偏)差

d.在 Independent Samples Test 表格內 Levene’s Test for Equality of Variances 下面之「Sig.」：進行兩組(男、女組)之間變異數相等性之檢定機率值，若此 Sig.(機率值)大於 0.05 時，代表兩組(男、女組)之間變異數未達顯著性差異水準，兩者的變異數相等成立，故 t 檢定的數值應看上列(藍色底儲存格)的數值；若此 Sig.(機率值)小於 0.05 時，代表兩組(男、女組)之間變異數達到顯著性差異水準，兩者的變異數不相等成立，故 t 檢定的數值應看下列(綠色底儲存格)的數值。

e.在 Independent Samples Test 表格內 t test for Equality of Means 下面之「t」：代表 t 檢定的 t 值

f.在 Independent Samples Test 表格內 t test for Equality of Means 下面之「Sig.」：代表 t 檢定機率值(P 值)。若某研究分析項目之 Sig.數值低於 0.05 代表兩組(男、女組)樣本有達到顯著性的差異水準，其差異情況可看 Group Statistics 表內的此項目的各組平均值，平均值高者(組)即代表其顯著性的比平均值低者(組)為高；若某研究分析項目之 Sig.數值高於 0.05 代表兩組(男、女組)樣本未達顯著性的差異水準，其 Group Statistics 表內的此項目的各組平均值，平均值高者(組)不代表其顯著性的比平均值低者(組)為高。

討論議題

1.學習者相互同步討論：兩個母體平均值之差的統計推論：獨立樣本運用

第一回合請於 D+2 日中午 12：00 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對本章學習的【兩個母體平均值之差的統計推論：獨立樣本】單元課程內容後，具體陳述現在或未來最想運用到的情境(10 個字以上)。

待有 25 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：選擇一個詮釋最佳者，並具體說明理由(10 字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

2.學習者相互同步討論：兩個母體平均值之差的統計推論：配對樣本運用

第一回合請於 D 日早上 09：10 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對本章學習的【10.3 兩個母體平均值之差的統計推論：配對樣本】單元課程內容，具體陳述現在或未來最想運用到的情境(10 個字以上)。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：選擇一個詮釋最佳者，並具體說明理由(10 字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

3.學習者相互同步討論：兩個母體比例之差的統計推論

第一回合請於 D 日早上 09：10 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對本章學習的【10.4 兩個母體比例的統計推論】單元課程內容，具體陳述現在或未來最想運用到的情境(10 個字以上)。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：選擇一個詮釋最佳者，並具體說明理由(10 字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

Excel 函數彙整

Excel 函數	統計功能	輸入資料	輸出資料
ABS	絕對值	正數值或負數值	對應的正數值

重點整理

兩個母體(加盟店)間平均值之差 = $\mu_1 - \mu_2$ 的點估計值為 = $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$。

兩個母體<u>樣本平均值之差</u>($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的期望值(Expected value)

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

兩個母體<u>樣本平均值之差</u>($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)抽樣分布的標準(偏)差

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

若分別從母體 1 和 2 所抽取的樣本數量夠大($n_1 > 30$ 同時 $n_2 > 30$)，兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會接近於<u>常態分布</u>。

分別從母體 1 和 2 所抽取的樣本數量夠大($n_1 > 30$ 同時 $n_2 > 30$)，兩個母體樣本平均值之差($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$)的抽樣分布會接近於常態分布。在區間估計的過程中，將樣本平均值<u>較高者</u>設定為<u>母體 1</u>(公式)，樣本平均

值較低者設定為母體 2。且母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知，兩個母體平均值之差 $\mu_1-\mu_2$ 在信賴係數 $1-\alpha$ 的區間估計為：

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} \qquad \bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

表　樣本數量多時，兩個母體平均值之差的區間估計

母體變異數	兩母體	信賴區間
已知	變異數不相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
已知	變異數相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$
未知	變異數不相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$
未知	變異數相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

表　樣本數量少時，兩個獨立母體平均值之差的區間估計

母體變異數	兩母體	信賴區間
已知	變異數不相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
已知	變異數相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$
未知	變異數不相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$
未知	變異數相等	$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right) \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

兩個母體平均值之差 $\mu_1-\mu_2$ 的假設檢定可分為三種型態

右尾檢定	左尾檢定	雙尾檢定
$H_0: \mu_1-\mu_2 \le 0$	$H_0: \mu_1-\mu_2 \ge 0$	$H_0: \mu_1-\mu_2 = 0$
$H_1: \mu_1-\mu_2 > 0$	$H_1: \mu_1-\mu_2 < 0$	$H_1: \mu_1-\mu_2 \ne 0$

表　樣本數量多時，兩個獨立母體平均值之差假設檢定

母體變異數	兩母體	檢定統計值
已知	變異數不相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
已知	變異數相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$
未知	變異數不相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$
未知	變異數相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

表　樣本數量少時，兩個獨立母體平均值之差假設檢定

母體變異數	兩母體	檢定統計值
已知	變異數不相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
已知	變異數相等	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

母體變異數	兩母體	檢定統計值
未知	變異數不相等	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$
未知	變異數相等	$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

配對樣本組合樣本平均值之差$\bar{d}=\bar{x}_1-\bar{x}_2$

$$\bar{d}=\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_{2i}}{n}=\bar{x}_1-\bar{x}_2$$

配對樣本組合之差的樣本變異數S_d^2和樣本標準(偏)差 S_d

$$S_d^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2-2\times d_i\times\bar{d}+\bar{d}^2)}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\sum_{i=1}^{n}(2\times d_i\times\bar{d})+\sum_{i=1}^{n}(\bar{d}^2)}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-2\times n\times\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i)}{n}\times\bar{d}+n\times\bar{d}^2}{n-1}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-2\times n\times\bar{d}\times\bar{d}+n\times\bar{d}^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{n}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n^2}}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}$$

$$S_d=\sqrt{S_d^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-n\times\bar{d}^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}}$$

分別從兩個配對組合母體隨機抽取的樣本組合數量夠大($n>30$)，兩個配對組合母體樣本平均值之差$\bar{d}=\bar{x}_1-\bar{x}_2$的抽樣分布會接近於常態分布。且母體 1 和 2 的標準(偏)差 σ_1 和 σ_2 已知，兩個配對組合母體平均值之差 $\mu_d=\mu_1-\mu_2$ 在信賴係數 $1-\alpha$ 的區間估計為：

$$\bar{d}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}\qquad\bar{d}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}\qquad\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

表　兩配對母體平均值之差的區間估計

樣本數量	母體	信賴區間
多 $n>30$	變異數已知	$\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$
多 $n>30$	變異數未知	$\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$
少 $n<30$	變異數已知	$\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$
少 $n<30$	變異數未知	$\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}$

兩個配對組合母體平均值之差 $\mu_d=\mu_1-\mu_2$ 的假設檢定可分為三種型態

右尾檢定	左尾檢定	雙尾檢定
H_0: $\mu_d\le 0$	H_0: $\mu_d\ge 0$	H_0: $\mu_d=0$
H_1: $\mu_d>0$	H_1: $\mu_d<0$	H_1: $\mu_d\ne 0$

表　兩配對母體平均值之差假設檢定

母體	樣本數量	母體	檢定統計值
常態分布	多 $n>30$	變異數已知	$z=\frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}$
常態分布	多 $n>30$	變異數未知	$z=\frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}}$
常態分布	少 $n<30$	變異數已知	$z=\frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}$

母體	樣本數量	母體	檢定統計值
常態分布	少 $n < 30$	變異數未知	$t = \dfrac{\bar{d}-\mu_d}{\dfrac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}}$
非常態分布	少 $n < 30$	變異數已知	柴比氏定理
非常態分布	少 $n < 30$	變異數未知	無母數統計法

$\bar{p}_1 - \bar{p}_2$ 抽樣分布

期望值(Expected value) $E(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = p_1 - p_2$

變異數(Variance) $\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \frac{p_1 \times q_1}{n_1} + \frac{p_2 \times q_2}{n_2} = \frac{p_1 \times (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \times (1-p_2)}{n_2}$

標準(偏)差 $\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \sqrt{\frac{p_1 \times q_1}{n_1} + \frac{p_2 \times q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{p_1 \times (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \times (1-p_2)}{n_2}}$

在樣本數量較多的情況($n_1 \times p_1 > 5$ 及 $n_1 \times q_1 > 5$ 和 $n_2 \times p_2 > 5$ 及 $n_2 \times q_2 > 5$)下，若母體比例 p_1 和 p_2 未知時，利用$\bar{p}_1$推估 p_1，以$\bar{p}_2$推估 p_2。在進行信賴區間估計時，一般會將樣本比率較高者，假設為母體 1；樣本比率較低者，假設為母體 2。在信賴係數 $1 - \alpha$，信賴區間為

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} \rightarrow (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} \rightarrow (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \times (1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \times (1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

在樣本數量較多的情況($n_1 \times p_1 > 5$ 及 $n_1 \times q_1 > 5$ 和 $n_2 \times p_2 > 5$ 及 $n_2 \times q_2 > 5$)下，因此，可以利用標準化 z 值進行假設檢定。在進行假設檢定時，一般會將樣本比率較高者，假設為母體 1；樣本比率較低者，假設為母體 2。

$$z = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1 \times \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \times \bar{q}_2}{n_2}}} = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1 \times (1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \times (1-\bar{p}_2)}{n_2}}}$$

關鍵詞彙解釋

區間估計

對特定變數的未知母體參數估計一個上下限的數值區間，並具體指出該數值區間包含母體參數的可靠度。

配對樣本(matched samples)

兩組樣本事先依據某些特徵或屬性予以配對(組合)，使同一對特徵相同的兩個樣本(組合)，一個分到一組，一個分到另一組，此兩個樣本(組合)即稱為配對樣本。

假設檢定(hypothesis testing)

與估計一起構成推論統計中的核心。針對欲估計未知參數，期望根據抽樣調查結果對未知的真正參數數值做出適當的推論。

統計上對參數數值的一種暫時性假設，就是對一個或多個參數的論述。欲檢驗其正確性的為虛無假設(null hypothesis)，虛無假設一般由研究者自行決定，反應研究者對未知參數的看法。相對於虛無假設陳述方式的另一種有關參數之論述是對立假設(alternative hypothesis)，其反應了執行檢定的研究者對參數可能數值的另一種(對立的)陳述。

期望值(Expected value)

在統計學中特定一個離散型隨機變數的期望值，是在隨機試驗中每次可能結果機率乘以其結果的總和。

針對特定一個連續型隨機變數 X，其機率密度函數 $f(x)$，隨機變數 X 的期望值為 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$。